পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ প্রণীত

গণিত

পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি
(অষ্টম শ্রেণী)

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ প্রণীত

গণিত

[পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি]

(অষ্টম শ্রেণী)

সমস্ত অনুমোদিত বিদ্যালয়ের অষ্টম শ্রেণীর গণিতের একমাত্র পাঠ্যপুস্তক

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ

FIRST EDITION, 1983
REPRINT , 1986
REPRINT , 1989
REPRINT 1990
Reprint : 1991
Reprint : 1992
Reprint : 1993
Reprint : 1994
Reprint : 1997

Printed at Typographers of India. 36A, K. G. Bose Sarani, Calcutta-700085 and published by Prof. Ujjwal Bose Secretary, West Bengal Board of Secondary Education, 77/2, Park Street, Calcutta-700016

ভূমিকা

গণিতের পরিবর্তিত পাঠ্যসূচী গত ১৯৮১ সালের শিক্ষাবর্ষে ষষ্ঠ শ্রেণীতে ও ১৯৮২ সালে সপ্তম শ্রেণীতে প্রবর্তিত হয়েছে। এ বছর (১৯৮৩) প্রবর্তিত হচ্ছে অষ্টম শ্রেণীতে এবং পরবর্তী বছরগুলিতে পর্যায়ক্রমে প্রবর্তিত হবে নবম ও দশম শ্রেণীতে। এই পাঠ্যসূচী রচনায় অংশগ্রহণ করেছিলেন মাধ্যমিক বিদ্যালয়, মহাবিদ্যালয়, শিক্ষক-শিক্ষণ মহাবিদ্যালয় ও বিশ্ববিদ্যালয় স্তরের শিক্ষক ও কয়েকজন লব্ধপ্রতিষ্ঠ গণিত বিশেষজ্ঞ। পাঠ্যসূচী রচনাকালে সাধারণভাবে অনুভূত হয় যে, পর্ষদের নিজস্ব উদ্যোগে গণিত বই রচিত হওয়া প্রয়োজন। পর্ষৎ তাঁদের এই অভিমতের গুরুত্ব উপলব্ধি করেই নিজস্ব উদ্যোগে বই রচনার সিদ্ধান্ত নেন। পর্ষদের এই সিদ্ধান্ত পশ্চিমবঙ্গ সরকারের অনুমোদন লাভ করে। ফলে, পর্ষৎ বিভিন্ন স্তরে গণিত শিক্ষার সঙ্গে যুক্ত গণিতবিদদের উপর পুস্তক রচনার দায়িত্ব দেন। পর্ষদ আনন্দের সঙ্গে লক্ষ্য করেছে যে ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণীর দুটি গণিত বই-ই শিক্ষক, শিক্ষাবিদ ও গণিতজ্ঞদের কাছ থেকে বিশেষ স্বীকৃতি পেয়েছে।

এবারে অষ্টম শ্রেণীর গণিত বইটি প্রকাশিত হল। এই বইটিতেও রচয়িতারা পাঠ্যসূচীর বিষয়গুলির সহজবোধ্য ব্যাখ্যা দেওয়ার চেষ্টা করেছেন। তাঁরা লক্ষ্য রেখেছেন অঙ্ক কষার নিয়মগুলি ছাত্রছাত্রীদের কাছে যাতে যান্ত্রিকতামুক্ত ও চিত্তাকর্ষক হয়। তাঁরা বিষয়সূচীকে বিভিন্ন সমস্যার মধ্য দিয়ে জীবনের সঙ্গে যুক্ত করারও চেষ্টা করেছেন। এর ফলে ছাত্রছাত্রীদের গণিত শিক্ষার আগ্রহ বাড়বে। বইটি রচনায় সময় ছাত্রছাত্রীদের মানসিক বিকাশের স্তরের দিকে দৃষ্টি রাখা হয়েছে। পর্ষৎ মনে করে, ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণীর বই-এর মতো এ বইটিতেও পাঠ্যসূচীর মূল তাৎপর্য সঠিকভাবে প্রতিফলিত হয়েছে।

গণিত শিক্ষক, শিক্ষাবিদ, ও শিক্ষানুরাগী সকলের কাছে পর্ষদের আবেদন, তাঁরা যেন বইটির ত্রুটি-বিচ্যুতি পর্ষদের নজরে আনেন এবং গঠনমূলক পরামর্শ দেন।

পর্ষৎ প্রণীত ষষ্ঠ শ্রেণীর গণিত বইটি পশ্চিমবঙ্গ সরকার ছাত্রছাত্রীদের মধ্যে বিনামূল্যে বিতরণ করে মাধ্যমিক স্তরে বিনামূল্যে বই দেওয়ার শুভ প্রচেষ্টা সূচনা করেছেন। রাজ্যসরকারের এই উদ্যোগ অভিনন্দনযোগ্য।

সর্বশেষে, যেসব শিক্ষক সংগঠন ও গণিত বিশেষজ্ঞ পাঠ্যসূচী প্রণয়নে এবং পাঠ্যপুস্তকের পাণ্ডুলিপি রচনায় সহায়তা করেছেন, পর্ষদের পক্ষ থেকে তাঁদের সকলকে আন্তরিক কৃতজ্ঞতা জানাচ্ছি এবং আশা করছি পর্ষৎ প্রণীত গণিত বইগুলি গণিতকে ছাত্রছাত্রীদের কাছে আকর্ষণীয় করে তুলবে এবং গণিত শিক্ষার মান উন্নত করবে।

ভবেশ মৈত্র
সভাপতি
পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ

৩১শে ডিসেম্বর, ১৯৮২
কলিকাতা

অষ্টম শ্রেণীর গণিত পুস্তকের প্রথম সংস্করণে কিছু মুদ্রণ প্রমাদ ও ত্রুটি ছিল। এই পুনর্মুদ্রিত সংস্করণে তা যথাসম্ভব দূর করার চেষ্টা হয়েছে। বইটি শিক্ষক ও ছাত্র সমাজে বিশেষ উৎসাহের সঙ্গে গৃহীত হয়েছে দেখে আনন্দ বোধ করছি।

শ্রীরঞ্জুগোপাল মুখোপাধ্যায়
সভাপতি
পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ

৩১শে ডিসেম্বর ১৯৮৬
কলিকাতা

(Revised Syllabus in Mathematics for Class VIII (Vide West Bengal Board of Secondary Education Notification No. Syll./79/19 dated 23.11.79 & Syll./80/9 dated 12.8.82)

CLASS VIII—1983

Arithmetic

30 Marks

1. Revision of previous works only through exercises on topics introduced in earlier classes.

2. Average ; Applications to simple problems based on experience of daily life of the pupil.

3. Extraction of Square root of fractions and decimals. Applications to simple problems.

4. Applications of Unitary Method to problems relating to Time and Distance, and Time and Work.

(Problems should be direct and properly graded).

Algebra

40 Marks

1. Revision of previous works through examples.

2. Multiplication of Polynomials, each with more than two terms. Division of Polynomials with a divisor having more than one term.

3. The following formulæ and their applications :

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$, $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

Physical representation of first two of the above formulæ using blocks.

4. Factorisation using the above formulæ.

5. Factorisation of a quadratic expression by breaking the middle term.

6. H. C. F. and L. C. M. of simple expressions by factorisation, and by division.

7. Fractions, and the four basic operations on them.

8. Solution of general linear equations involving one variable

Geometry

30 Marks

The aim of teaching Geometry at this stage is to make the pupils familiar with logical deductive reasoning. Any form of logical reasoning is allowed. The following properties obtained through activities in previous classes should be taken as axioms.

(i) When a straight line cuts two other straight lines those other two straight lines are parallel if a pair of corresponding angles are equal. (ii) Two intersecting straight lines cannot both be parallel to a third straight line. (iii) If the two sides and their included angle in a triangle are respectively equal to the two sides and their included angle in another triangle, the two triangles are congruent. (iv) If the two angles and the side common to them in one triangle are respectively equal to the two angles and the side common to them in another triangle the two triangles are congruent.

To establish the following propositions :-

(a) If a straight line stands on another straight line, the sum of the two angles so formed is equal to two right angles. (b) If the sum of two adjacent angles is equal to two right angles, exterior arms of the angles are on the same straight line. (c) If two straight lines intersect, the vertically opposite angles are equal. (d) When a straight line cuts two other straight lines those other two straight lines are parallel if, either, (i) a pair of alternate angles are equal, or, (ii) a pair of interior angles on the same side of the cutting line are together equal to two right angles. (e) If a straight line cuts two parallel straight lines, then (i) the corresponding angles are equal, (ii) the alternative angles are equal, (iii) the interior angles on the same side of the cutting line are together equal to two right angles. (f) The sum of the angles of a triangle is equal to two right angles. (g) If one side of a triangle be produced, the exterior angle so formed is equal to the sum of two interior opposite angles. (h) The sum of the interior angles of a polygon of n sides is equal to $2(n-2)$ right angles. (i) If two sides of a triangle are equal, the angles opposite to them are also equal, and conversely. (j) Congruence of two triangles—SSS. (k) Congruence of two right-angled triangles. (l) If two sides of a triangle are unequal, the angle opposite to the greater side is greater than the angle opposite to the less, and conversely. (m) Any two sides of a triangle are together greater than the third side. (n) Of all line segments that can be drawn to a given straight line from a given point outside it, the perpendicular is the shortest.

2. Constructions with proof :

(i) To draw a straight line through a given point parallel to a given straight line. (ii) To divide a line segment into a number of equal segments.

3. Simple problems based on the above propositions, and constructions.

সূচীপত্র

পাটীগণিত

বীজগণিত

জ্যামিতি

পাটীগণিত

প্রথম অধ্যায়

পূর্বপাঠের অনুশীলনী

প্রশ্নমালা 1 (ক)

1. লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশে পরিণত কর ঃ

$\cdot 125,\ 1\cdot 025,\ \cdot 00512,\ 10\cdot 124,\ \cdot 00625,\ \cdot 3125,\ \frac{\cdot 56}{\cdot 08},\ \frac{7\cdot 02}{1\cdot 25}$

2. মানের ক্রমানুসারে সাজাও (বড় থেকে ছোট) ঃ

(a) $\cdot 001,\ \cdot 0009,\ \cdot 0011,\ \cdot 0101,\ \cdot 00098.$

(b) $\frac{1}{2},\ \cdot 499,\ \frac{1}{3},\ \cdot 51,\ \cdot 299.$

(c) $\frac{1}{\cdot 1},\ \frac{1}{\cdot 01},\ \frac{\cdot 01}{2},\ \frac{\cdot 001}{5},\ \frac{\cdot 1}{\cdot 0001}$

3. লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশে পরিণত কর ঃ

(a) $\cdot 0\dot{8}\dot{1},\ \cdot\dot{8}\dot{1},\ \cdot 00\dot{8}\dot{1},\ 2\cdot 0\dot{0}8\dot{1},\ 2\cdot 21\dot{8}\dot{1}.$

(b) $\cdot 00\dot{7}2\dot{9},\ 3\cdot 10\dot{7}\dot{6},\ \dot{1}4285\dot{7},\ \cdot 0\dot{5}7142\dot{8},\ 14\cdot 0\dot{1}3\dot{1}.$

4. সরল কর ও লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশে উত্তর দাও ঃ

(a) $10\cdot 6\dot{2}\dot{8} - 3\cdot\dot{7}23\dot{0} - 2\cdot 23\dot{8}.$

(b) $\frac{\cdot 1\dot{2}0\dot{3}}{3\cdot 6\dot{4}\dot{2}} \div \frac{\cdot\dot{7}1428\dot{5}}{\cdot\dot{8}5714\dot{2}} \times \frac{\cdot 03\dot{0}\dot{7}}{\cdot 3\dot{4}\dot{5}}.$

5. (a) 1 মিটার $= 3\cdot 281$ ফুট হলে, $5\cdot 37$ ফুটে কত মিটার হবে ? (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানে নির্ণয় কর।)

(b) 1 কিলোমিটার $= \cdot 6214$ মাইল হলে, $15\cdot 05$ মাইলে কত কিলোমিটার হবে ? (এক দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানে উত্তর দাও।)

(c) 1 গ্যালন $= 4\cdot 536$ লিটার হলে, $10\frac{1}{2}$ লিটার পেট্রোলে কত গ্যালন পেট্রোল হবে তা দুই দশমিক স্থানপর্যন্ত আসন্ন মানে নির্ণয় কর।

কোন পেট্রোল বিক্রেতা $10\frac{1}{2}$ লিটার পেট্রোলের পরিবর্তে পূর্ণসংখ্যক গ্যালনের আসন্ন মানে পেট্রোল দিলে কত দেবেন ? সেক্ষেত্রে তিনি কত কম বা বেশী দেবেন তার পরিমাণ গ্যালনের দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানে নির্ণয় কর।

প্রশ্নমালা 1 (খ)

1. শূন্যস্থান পূরণ কর ঃ—

(*a*) কোন ভগ্নাংশের গুণনীয়ক $=\dfrac{\text{লবের কোন গুণনীয়ক}}{\text{হরের কোন}\cdots\cdots\cdots}$

(*b*) কয়েকটি ভগ্নাংশের একটি সাধারণ গুণনীয়ক

$=\dfrac{\text{লবগুলির একটি সাধারণ}\cdots\cdots\cdots}{\text{হরগুলির একটি সাধারণ গুণিতক}}$

(*c*) কয়েকটি ভগ্নাংশের গ. সা. গু. $=\dfrac{\text{লবগুলির গ. সা. গু.}}{\text{হরগুলির}\cdots\cdots\cdots\cdots}$

(*d*) কোন ভগ্নাংশের গুণিতক $=\dfrac{\text{লবের কোন}\cdots\cdots\cdots}{\text{হরের কোন গুণনীয়ক}}$

(*e*) কয়েকটি ভগ্নাংশের ল. সা. গু $=\dfrac{\text{লবগুলির}\cdots\cdots}{\text{হরগুলির}\cdots\cdots}$

(*f*) দুটি ভগ্নাংশের গ. সা. গু. × তাদের ল. সা. গু.

$=\dfrac{\text{লব দুটির গুণফল}}{\text{হর দুটির}\cdots\cdots\cdots}$

2. নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলির সবচেয়ে ছোট দুইটি সাধারণ গুণিতব নির্ণয় কর ঃ

(*a*) $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{10}$. (*b*) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $1\frac{1}{3}$.

3. ল সা. গু. নির্ণয় কর ঃ

(*a*) $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{15}$, $1\frac{1}{3}$ (*b*) $1\frac{5}{7}$, $3\frac{1}{8}$, $\frac{9}{14}$

(*c*) 20, $3\frac{3}{4}$, $6\frac{2}{3}$, (*d*) 4·3, 1·29, 21·5

(*e*) ·75, 12·5, 6·25, ·005.

4. গ. সা. গু. নির্ণয় কর ঃ

(*a*) $3\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$ (*b*) 3, $4\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{4}$ (*c*) $2\frac{13}{16}$, $1\frac{23}{40}$, $3\frac{3}{32}$

(*d*) 2·8, ·25, 20 (*e*) ·24, ·6, ·96

প্রশ্নমালা 1(গ)

1. (*a*) 5-এর বর্গমূলের বর্গ কত হবে ?

(*b*) নিচের সংখ্যাগুলির বর্গমূলের বর্গমূল কত ?

1, 81, 2401, 10556001.

(c) 8 অঙ্কের একটি সংখ্যার বর্গমূল কত অঙ্কের সংখ্যা হবে ?

(d) 98-এর সঙ্গে কোন্ ক্ষুদ্রতম অখণ্ড সংখ্যা গুণ করলে গুণফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে ?

(e) 192কে কোন্ ক্ষুদ্রতম পূর্ণ সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে ?

2. বর্গমূল নির্ণয় কর ঃ

(a) 9216, 99225, 10201, 651249, 53824

(b) 1002001, 1192464, 375769, 105625, 57214096.

3. বর্গমূল নির্ণয় না করে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির বর্গমূলের অঙ্ক-সংখ্যা নির্ণয় কর। প্রতিটি বর্গমূলের একক স্থানীয় অঙ্ক কি বা কি কি হতে পারে ? 15129, 1000014129, 4967284

4. 14669 থেকে ক্ষুদ্রতম কোন্ পূর্ণ সংখ্যা বিয়োগ করলে বিয়োগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে ?

5. 5 অঙ্কের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বর্গ সংখ্যা নির্ণয় কর।

6. একটি দলে যতজন লোক ছিল প্রত্যেকে তার দ্বিগুণ 25 পয়সা দেওয়ায় মোট 84·50 টাকা উঠল। দলে কতজন লোক ছিল ?

7. খেলার মাঠে বিদ্যালয়ের ক্রীড়া শিক্ষক 876 জন ছাত্রকে নিরেট বর্গাকারে সাজালেন। তিনি ছেলেদের সবচেয়ে বেশী কয়টি সারিতে সাজাতে পারতেন ? ওভাবে সাজালে কজন ছাত্র বেশী থাকত ?

8. 9778 জন সৈন্যের সঙ্গে কমপক্ষে আর কত জন যোগ দিলে ঐ সৈন্যদের নিরেট বর্গাকারে সাজানো যাবে ?

9. 4726 জন সৈন্যকে দুটি দলে ভাগ করে প্রত্যেক দলকে নিরেট বর্গাকারে সাজাতে গিয়ে দেখা গেল দ্বিতীয় দলের সৈন্য সংখ্যা কিছু বেশী হচ্ছে। প্রথম দলের সারির সংখ্যা 32, দ্বিতীয় দলে সারির সংখ্যা কত হবে ? ঐ দলে কমপক্ষে কত জন সৈন্য বেশী হবে ?

10. দুটি সংখ্যার গুণফল 2500. একটি সংখ্যা আর একটির 4 গুণ। সংখ্যা দুটি কি কি ?

প্রশ্নমালা 1(ঘ)

1. সুমনা, সুতপা ও সুতনুকার দৌড় প্রতিযোগিতায় দেখা গেল সুমনা 20 সেকেণ্ডে 100 মিটার দৌড়েছে ; ঐ সময়ে সুতপা 95 মিটার ও সুতনুকা

92 মিটার দৌড়েছে। একই হারে দৌড়ালে কত সময়ে সুতপা 100 মিটার দৌড়াবে? সুতনুকা কত সময়ে 100 মিটার দৌড়াবে? দৌড়ানোর হার একই থাকলে সুমনা, সুতপা ও সুতনুকার গতিবেগ যথাক্রমে ঘণ্টায় কত কিলোমিটার হবে?

2. রাহুল 25 মিনিটে $1\frac{1}{2}$ কিলোমিটার পথ অতিক্রম করল। সে যদি সমস্ত পথের অর্ধেক দ্বিগুণ বেগে যেত, তাহলে সমস্ত পথ অতিক্রম করতে তার কত সময় লাগত?

3. কমলেশের হাঁটার গতিবেগ ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার। সাইকেলে তার গতিবেগ ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার। 14 কিলোমিটার রাস্তা পায়ে হাঁটার পরিবর্তে সাইকেলে গেলে তার কত সময় বাঁচবে?

4. নুরুল 60 বার পদক্ষেপ করে 20 মিটার যায়। তার 6 বার পদক্ষেপ করতে 5 সেকেন্ড লাগে। পদক্ষেপের হার একই হলে তার গতিবেগ ঘণ্টায় কত হবে?

5. সতীশ 70 সেকেন্ডে 25 মিটার হাঁটে। সুরেশ 45 সেকেন্ডে 17 মিটার হাঁটে। তাদের গতিবেগের পার্থক্য কত?

6. ঘণ্টায় 50 কিমি বেগে 80 মিটার লম্বা একটি ট্রেন কত সময়ে একটি খুঁটিকে অতিক্রম করবে? ঐ ট্রেনটি কত সময়ে 200 মিটার একটি প্লাটফরমকে অতিক্রম করবে?

7. শব্দ সেকেন্ডে 342 মিটার যায়। শব্দের গতিবেগ ঘণ্টায় কত কিলোমিটার হবে? (আসন্ন কিলোমিটারে গতিবেগ নির্ণয় কর)।

8. অনিল ঘণ্টায় 12 কিমি ও প্রদীপ ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে হাঁটে। 2 কিলোমিটার হাঁটার প্রতিযোগিতায় অনিল পথের মাঝে 5 মিনিট বিশ্রাম নিল, কিন্তু প্রদীপ বিশ্রাম না নিয়েই ঐ রাস্তা হাঁটল। তারা কি একই সঙ্গে পৌঁছবে না আগে পরে পৌঁছবে? আগে পরে পৌঁছলে কে আগে পৌঁছবে এবং কত আগে পৌঁছবে? [1 মাইল = 1·6 কিমি]

প্রশ্নমালা 1(ঙ)

1. বার্ষিক $6\frac{1}{2}\%$ হারে 880 টাকার $3\frac{1}{4}$ বছরের সুদ কত হবে?

2. বার্ষিক $7\frac{1}{2}\%$ হারে 1240 টাকা $7\frac{1}{2}$ বছরে সুদে-আসলে কত টাকা হবে?

3. 525 টাকা 5 বছরে সুদে-আসলে 682·50 টাকা হলে বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত?

4. বার্ষিক শতকরা কত সুদের হারে কোন মূলধন 6 বছরে সুদে-আসলে দ্বিগুণ হবে.

5. কত বছরে কোন মূলধন বার্ষিক 4% সুদের হারে সুদে-আসলে দ্বিগুণ হবে ?

6. কোন ব্যাঙ্কে বার্ষিক 4% সুদের হারে 4000 টাকা রাখা হল। কত সময়ে 400 টাকা সুদ পাওয়া যাবে ?

7. বিনোদবাবু 12000 টাকা বার্ষিক 6% সুদের হারে ব্যাঙ্ক থেকে ধার নিয়ে একটি বাড়ী তৈরী করলেন। বাড়ী তৈরী করতে তার 2 মাস লাগল। বাড়ীটি তিনি মাসে 180 টাকা হিসাবে ভাড়া দিলেন। বাড়ী ভাড়ার টাকা জমিয়ে বাড়ী ভাড়া দেওয়ার কত সময় পরে তিনি সুদসহ ব্যাঙ্কের ধার শোধ করতে পারবেন ?

8. বার্ষিক 6% সুদের হারে 4 বছরে 3375 টাকার সুদ কত হবে ?

9. কত টাকা বার্ষিক 6% সুদের হারে 5 বছরে সুদে আসলে 1417 টাকা হবে ?

10. কত টাকা বার্ষিক $4\frac{3}{4}$% সুদের হারে 6 বছরে সুদে আসলে 899·50 টাকা হবে ?

11. 3250 টাকা জমা রাখলে একটি ব্যাঙ্ক 6 মাস অন্তর কোন লোককে 130 টাকা সুদ দেয়। বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত ?

প্রশ্নমালা 1(চ)

1. জামালের জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 5 মিটার ও 4 মিটার। সুনীলের বর্গাকার জমির দৈর্ঘ্য 4 মিটার। উভয়ের জমির পরিসীমার পার্থক্য কত ? উভয়ের জমির ক্ষেত্রফলের পার্থক্য কত ?

2. একটি ঘরের ভেতরের দিকের দৈর্ঘ্য 6 মি, প্রস্থ 5 মি 50 সেমি ও উচ্চতা 3 মি 25 সেমি। ঘরটির চারটি দেয়ালের ক্ষেত্রফল কত ? প্রতি বর্গমিটার 2·25 টাকা হিসাবে রং করতে মোট কত খরচ পড়বে ?

3. একটি ঘরের ভেতরের দিকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 5·1 মি, 3·2 মি ও 3 মি। ঐ ঘরে 2·4 মি দৈর্ঘ্য ও ·9 মি প্রস্থবিশিষ্ট একটি দরজা ও 1·2 মি দৈর্ঘ্য ও 1·1 মি প্রস্থবিশিষ্ট দুটি জানলা আছে। 60 পয়সা বর্গমিটার হিসাবে ঘরটির দেয়ালগুলি চুনকাম করতে মোট কত খরচ পড়বে ?

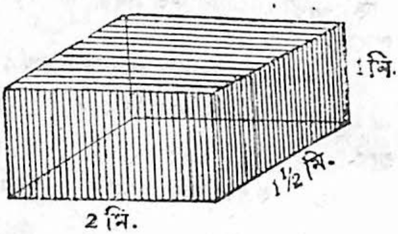
4. একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ। ঐ মেঝে পাকা করতে প্রতি বর্গমিটারে 10·25 টাকা হিসাবে মোট 1312 টাকা খরচ হয়। ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

5. দুটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ যথাক্রমে 6 মি ও 8 মি। ঐ দুই ক্ষেত্রের সমষ্টি ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও পরিসীমা কত?

6. 50 মি দীর্ঘ ও 42 মি প্রশস্ত একটি মাঠের ভেতরের চারিদিকে 3 মি চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল কত? ঐ রাস্তা তৈরী করার জন্য প্রতি বর্গমিটার 1·50 টাকা হিসাবে মোট কত খরচ হবে?

7. 20 মি দীর্ঘ একটি বর্গাকার বাগানের মাঝ বরাবর $1\frac{1}{2}$ মি ও $2\frac{1}{2}$ মি চওড়া দুটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল কত? রাস্তা বাদে বাগানের ক্ষেত্রফল কত?

8. একটি কাঠের বাক্সের বাইরের দিকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 2 মি, $1\frac{1}{2}$ মি ও 1 মি। তার ছয়টি তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। প্রতি বর্গমিটার রং করতে যদি 4·50 টাকা লাগে, তবে বাক্সটির ছয়টি তল বাইরের দিকে রং করতে কত খরচ পড়বে?



দ্বিতীয় অধ্যায়

গড়

'গড়' কথাটির ইংরেজী প্রতিশব্দ "Average"। এই শব্দটি এসেছে ল্যাটিন 'হ্যাভেরিয়া' শব্দ থেকে। এর অর্থ হলো নিজের কাছ থেকে কিছু দিয়ে যার কম আছে তাকে সমান পর্যায়ে নিয়ে আসা। বাংলায় আমরা এই শব্দটি দ্বারা সাধারণভাবে 'মাঝামাঝি মান' ধারণাটি বুঝাই।

এর আগে চতুর্থ শ্রেণীতে গড় সম্বন্ধে একটি সাধারণ ধারণা তোমরা পেয়েছ। সেখানে দেখেছ—একই জাতীয় দুই বা ততোধিক ভিন্ন ভিন্ন মানের তুলনা করার জন্য রাশিগুলোর মানের সমষ্টি নিয়েছ এবং তাকে রাশিগুলোর সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে 'গড় মান' অর্থাৎ মাঝামাঝি মান নির্ণয় করেছ। পরে তার সঙ্গে ভিন্ন ভিন্ন মানের গুরুত্ব তুলনা করেছ।

যেমন তিন বন্ধু রাম, শ্যাম ও যদু অঙ্কের পরীক্ষায় যথাক্রমে 75, 78 ও 84 নম্বর পেয়েছে। মনে কর এদের কৃতিত্বের তুলনা করতে হবে।

তারা যদি দু'জন হতো তবে সাধারণ বিয়োগ প্রক্রিয়ার সাহায্যেই তা করা যেতো এবং বলা যেতো রাম শ্যামের চেয়ে 3 নম্বর কম পেয়েছে। যেহেতু তারা তিনজন তাই সাধারণ বিয়োগের সাহায্যে তাদের কৃতিত্ব একইসঙ্গে তুলনা করা অসুবিধাজনক। সেজন্য একটি সাধারণ মাপকাঠি হলে তার সঙ্গে তুলনা করে তিনজনের কৃতিত্ব একই সঙ্গে সহজে তুলনা করা যায়। সাধারণতঃ আমরা প্রদত্ত মানগুলোর গড় মানকে সেই সাধারণ মাপকাঠি হিসাবে ধরে থাকি। আর তোমরা জান, গড় মান নির্ণয় করা হয় নিম্নলিখিত সূত্র অনুযায়ী :

$$\text{গড় মান} = \frac{\text{রাশিগুলোর ভিন্ন ভিন্ন মানের সমষ্টি}}{\text{প্রদত্ত রাশিগুলোর মোট সংখ্যা}}$$

সেইমতো এখানে তাদের তিনজনের প্রাপ্ত নম্বরের গড় হবে

$$\text{গড় নম্বর} = \frac{75+78+84}{3} = 79$$

এবার এই গড় নম্বরের সঙ্গে তিনজনের কৃতিত্বের পরিমাপ তুলনা করলে দেখা যাবে যে রাম 4 নম্বর কম, শ্যাম 1 নম্বর কম ও যদু 5 নম্বর বেশী পেয়েছে।

গড়ের ধারণাকে বাস্তব জীবনের বিভিন্ন কাজে ব্যবহার করা হয়, যেমন: বিঘাপ্রতি গড় ফলন গড় আয়, বাৎসরিক গড় জনসংখ্যা বৃদ্ধি ইত্যাদি। তাছাড়া ব্যবহারিক কাজেও গড়-এর ধারণাটি নানাভাবে সহায়ক হয়, যেমন একজন দরজী যখন রেডিমেড পোশাক তৈরি করে তখন বিভিন্ন বয়সের ছেলেমেয়ের গড় উচ্চতার উপর নির্ভর করে বিভিন্ন সাইজের পোশাক তৈরি করে। অনুরূপ আরও অনেক উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে। তোমরা চিন্তা করে কয়েকটি উদাহরণ বের কর।

গড় মান নির্ণয়ের বীজগাণিতিক সূত্র:

সপ্তম শ্রেণীতে তোমরা বীজগাণিতিক প্রতীকের সাহায্যে অজানা ও অনির্দিষ্ট সংখ্যা প্রকাশ করার কৌশল শিখেছ এবং প্রতীকের সাহায্যে বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়াকে কিভাবে সূত্রাকারে প্রকাশ করা যায় তাও শিখেছ। এবার গড় নির্ণয়ের সূত্রটিকে কি করে বীজগাণিতিক সাধারণ সূত্রে প্রকাশ করা যায় দেখ: মনে কর কোন একজাতীয় কয়েকটি বিভিন্ন রাশির মান নিম্নরূপ:

1ম	রাশিটির	মান	a_1
2য়	"	"	a_2
3য়	"	"	a_3
....	....	....	....
....	....	....	....
$(n-1)$ তম	"	"	a_{n-1}
nতম	"	"	a_n

রাশির মোট সংখ্যা n

রাশিগুলোর মান সমষ্টি: $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$

তোমরা জান গড় মান $=\dfrac{\text{রাশিগুলোর মানসমষ্টি}}{\text{রাশিগুলোর মোট সংখ্যা}}$। সেই মতো যদি গড় মানকে A ধরা হয়, তবে উপরের বর্ণনা থেকে যে সূত্রটি পাওয়া যাবে তা হলো :

$$A=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n}{n}$$

নির্দিষ্ট সমস্যায় সূত্রটি কিভাবে প্রয়োগ করা যায় দেখ :

মীনা ও তার দুই বন্ধুর বয়স নিম্নরূপ। তাদের গড় বয়স নির্ণয় করতে হবে।

মীনা	কমলা	সুলেখা
14 বছর 6 মাস	14 বছর 11 মাস	15 বছর 7 মাস

এখানে রাশিগুলোর সংখ্যা $n=3$

আর মানগুলো $a_1=14$ বছর 6 মাস

$a_2=14$ বছর 11 মাস

$a_3=15$ বছর 7 মাস

সুতরাং নির্ণেয় গড় $=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$

$=\dfrac{\text{14 বছর 6 মাস}+\text{14 বছর 11 মাস}+\text{15 বছর 7 মাস}}{3}$

$=\frac{45}{3}$ বছর $=15$ বছর

সুতরাং তাদের বয়সের গড় 15 বছর।

কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত :

তোমরা জান : গড় মান $=\dfrac{\text{রাশিগুলোর মানসমষ্টি}}{\text{রাশিগুলোর মোট সংখ্যা}}$

এই সম্পর্ক থেকে আরও দুটি সম্পর্ক পাওয়া যায়

(১) রাশিগুলোর মানসমষ্টি = গড় মান × রাশির সংখ্যা

(২) রাশির সংখ্যা $=\dfrac{\text{রাশিগুলোর মানসমষ্টি}}{\text{গড় মান}}$

উদাহরণ 1. তোমাদের বাগানের সাতটি নারকেল গাছে যথাক্রমে 62, 75, 68, 70, 83, 74 ও 65টি নারকেল ফলেছে। গাছগুলোতে গড়ে কতগুলো করে নারকেল ফলেছে ?

প্রশ্নটির প্রতিপাদ্য বিষয় হলো—নারকেলের মোটসংখ্যা যা আছে তা ঠিক রইলো, অথচ প্রতিটি গাছে যদি সমান সংখ্যক নারকেল ফলেছে ধরে নেওয়া হয়, তবে প্রতিটি গাছে কত নারকেল থাকতো।

এখানে গাছের মোট সংখ্যা $=7$ এবং নারকেলের মোট সংখ্যা $=62+75+68+70+83+74+65=497$

সুতরাং নির্ণেয় গড় $=\frac{497}{7}=71$

[বিঃ দ্রঃ মনে রাখতে হবে গড় মান সবসময়ই একটি সম্ভাব্য মান, বাস্তবে সে মান নাও থাকতে পারে। উপরোক্ত উদাহরণে গড় মান 71 অথচ বাস্তবে কোন গাছেই 71টি নারকেল নেই।]

উদাহরণ 2. একটি ক্রিকেট ম্যাচে তোমাদের স্কুল টিমের 11 জন খেলোয়াড় গড়ে 14 রান করেছে। তোমাদের স্কুল টিম মোট কত রান করেছে ?

তোমরা জান : রাশিগুলোর মানসমষ্টি = গড় রান-সংখ্যা × রাশির সংখ্যা

এখানে গড় রানসংখ্যা $=14$ এবং রাশির সংখ্যা $=11$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট রানসংখ্যা $=14\times 11=154$

$\therefore$ তোমাদের স্কুল টিম মোট 154 রান করেছে।

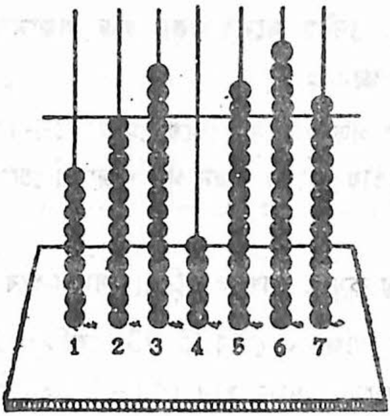
উদাহরণ 3. একটি কারখানার শ্রমিকদের সাপ্তাহিক মজুরি 1416 টাকা। প্রত্যেক শ্রমিক সপ্তাহে গড়ে 118 টাকা মজুরি পান। ঐ কারখানায় কতজন শ্রমিক কাজ করেন ?

তোমরা জান : রাশির সংখ্যা $=\dfrac{\text{রাশিগুলোর মানসমষ্টি}}{\text{গড় মান}}$

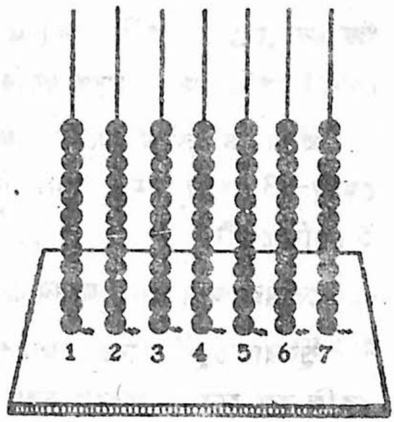
এখানে গড় মজুরি $=118$ টাকা এবং মোট মজুরি 1416 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রমিক সংখ্যা $=\frac{1416}{118}=12$

অর্থাৎ কারখানায় 12 জন শ্রমিক কাজ করেন।



1 নং চিত্র



2 নং চিত্র

উপরের 1 নং চিত্রে এক মুখ খোলা এবেকাসের মতো একটি ফ্রেমের 7টি লৌহদণ্ডে যথাক্রমে 9, 12, 15, 5, 14, 16 ও 13টি বল আছে। তাহলে বলের সংখ্যার গড় হবে $\frac{9+12+15+5+14+16+13}{7}=\frac{84}{7}=12$। চিত্রে দেখ বাঁদিক থেকে 2নং দণ্ডে 12টি বল আছে। এবার চিত্রের মধ্যে দ্বিতীয় দণ্ডের শেষ বলটির উপর দিয়ে সোজাসুজি একটি সুতো প্রথম থেকে সপ্তম দণ্ড পর্যন্ত বাঁধা হলো। দেখা যাচ্ছে কয়েকটি দণ্ডে গড়সংখ্যার চেয়ে কম বল আছে; আবার অন্য কয়েকটি দণ্ডে গড় সংখ্যার চেয়ে বেশী বল আছে। যেমন 1নং দণ্ডে 3টি, 4নং দণ্ডে 7টি বল কম আছে, আবার 3নং দণ্ডে 3টি, 5নং দণ্ডে 2টি, 6নং দণ্ডে 4টি এবং 7নং দণ্ডে 1টি বল বেশী আছে;

অর্থাৎ 2টি দণ্ড মিলে মোট 3+7=10টি বল কম আছে এবং অন্য 4টি দণ্ড মিলে মোট 3+2+4+1=10টি বল বেশী আছে।

যেখানে বেশী বল আছে সেখান থেকে বেশী বলগুলো নিয়ে তা যদি হিসাব মতো যেখানে কম বল আছে তাতে ভাগ করে দেওয়া যায়, তবে সব মান গড় মানের সমান হবে। এ থেকে এই সিদ্ধান্ত করা যায় যে, গড় মানের চেয়ে কম ও বেশীর পরিমাণ একটি আর একটির সমান হয়।

উদাহরণ 4. চারজন বালকের ওজনের গড় 42 কেজি। প্রথম জনের ওজন গড় ওজনের চেয়ে 2 কেজি কম দ্বিতীয় জনের ওজন গড়

ওজনের চেয়ে 5 কেজি বেশী এবং তৃতীয় জনের ওজন গড় ওজনের চেয়ে 1 কেজি কম। চতুর্থ জনের ওজন কত ?

প্রথম ও তৃতীয় জনের ওজন গড় ওজনের চেয়ে মোট (2+1) কেজি=3 কেজি কম। আর দ্বিতীয় জনের ওজন গড় ওজনের চেয়ে 5 কেজি বেশী।

তোমরা জান গড় ওজনের চেয়ে কম ও বেশীর পরিমাণ সমান হবে।

সুতরাং চতুর্থ জনের ওজন গড় ওজনের চেয়ে (5−3) কেজি=2 কেজি কম হবে। সুতরাং চতুর্থ জনের ওজন হবে (42−2) কেজি =40 কেজি।

প্রশ্নমালা 2

1. কোন বিদ্যালয়ের পঞ্চম, ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 72, 64, 53। ঐ তিন শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যার গড় কত ?

2. তোমাদের বিদ্যালয়ের ক্রিকেট টিমে মোট 11 জন খেলোয়াড় আছে। প্রথম ইনিংসে তোমাদের টিম মোট 176 রান করেছে। খেলোয়াড়দের রানের গড় কত ?

3. মহিমদের পাঁচ বিঘা জমিতে প্রতি বিঘায় যথাক্রমে 4·25 কুইণ্টাল, 5 কুইণ্টাল, 5·25 কুইণ্টাল, 4·75 কুইণ্টাল ও 4·50 কুইণ্টাল ধান ফলেছে। মহিমরা বিঘাতে গড়ে কত কুইণ্টাল করে ধান পেয়েছে ?

4. রঘুনাথ দাস পাঠাগারের সাতটি আলমারীর ছয়টিতে যথাক্রমে 135, 180, 122, 167, 155 ও 132টি বই আছে। অথচ হিসাব করে দেখা গেল সাতটি আলমারীতে গড়ে 148টি করে বই আছে। সপ্তম আলমারীতে কটি বই আছে ?

5. একটি তাঁত কারখানায় এক সপ্তাহে সোম থেকে শনিবার পর্যন্ত দিনে গড়ে 15টি কাপড় তৈরি হয়েছে। ঐ কদিনে মোট কতগুলি কাপড় তৈরি হয়েছে ?

6. কোন বিদ্যালয়ের পঞ্চম, ষষ্ঠ, সপ্তম, নবম ও দশম শ্রেণীতে যথাক্রমে 90, 87, 82, 64, 52 জন ছাত্র আছে। যদি বিদ্যালয়ে ছয়টি শ্রেণীর গড় ছাত্রসংখ্যা 77 হয় তবে অষ্টম শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা কত ?

7. তোমাদের বিদ্যালয়ের গ্রন্থাগারে 14টি আলমারীতে মোট 1984টি বই আছে। আরো কতকগুলো নতুন বই ক্রয় করা হয়েছে। নতুন বইগুলো সেই আলমারীগুলোতে সাজিয়ে রাখলে আলমারীতে গড়ে 156টি বই থাকবে। কতগুলো নতুন বই ক্রয় করা হয়েছে ?

8. কোন পরিবারে পিতা ও মাতার বয়সের গড় 35 বছর। কিন্তু পিতা, মাতা ও তাদের একমাত্র পুত্রের বয়সের গড় 27 বছর। পুত্রের বয়স কত ?

9. কোন একটি ক্রিকেট খেলায় দলের প্রথম তিনজন খেলোয়াড়ের রানের গড় 50 এবং 11 জনের মোট রান 342। ঐ খেলায় বাকি 8 জন খেলোয়াড়ের রানের গড় কত ?

10. একটি শ্রেণীর 25 জন ছাত্রছাত্রীর মধ্যে প্রথম 10 জনের বয়সের গড় 14·4 বছর এবং শেষ 8 জনের বয়সের গড় 14·8 বছর। মাঝের 7 জনের বয়সের গড় কত হলে ঐ শ্রেণীর সমস্ত ছাত্রছাত্রীর বয়সের গড় 14·5 বছর হবে ?

11. একটি নারকেল বাগানের 12টি গাছে 984টি নারকেল ছিল। 5টি গাছ থেকে গড়ে 26টি নারকেল এবং 7টি গাছ থেকে গড়ে 38টি নারকেল পাড়ার পর বাগানের নারকেল গাছগুলিতে গড়ে কয়টি করে নারকেল থাকবে ?

12. কোন সপ্তাহে দৈনিক বৃষ্টিপাতের গড় ·25 সেমি। রবিবারে বৃষ্টি হয়নি। সোমবার ·4 সেমি, মঙ্গলবার ·02 সেমি, বুধবার ·45 সেমি, বৃহস্পতিবার ·28 সেমি এবং শুক্রবার ·58 সেমি বৃষ্টিপাত হয়েছে। শনিবার কত বৃষ্টিপাত হয়েছিল ?

13. একটি বিদ্যালয়ে অষ্টম শ্রেণীর 30 জন ছাত্রের গড় উচ্চতা 147 সেমি। কম উচ্চতার 14 জনের গড় উচ্চতা 145 সেমি ; বেশী উচ্চতার 6 জনের গড় উচ্চতা 152 সেমি। মাঝারি উচ্চতার 10 জনের গড় উচ্চতা কত ?

14. একটি চা বাগিচার একটি জমিতে 325 সারিতে মোট 52000টি চারাগাছ লাগানো হয়েছিল। একমাস পর দেখা গেল 3575টি চারাগাছ মরে গেছে। এখন ঐ জমির সারিগুলিতে গড়ে কতগুলো করে গাছ আছে ?

15. সোমবার থেকে শুরু করে কোন এক সপ্তাহের মধ্যাহ্নকালীন তাপমাত্রার গড় ছিল 73·9°। প্রথম 3 দিনের তাপমাত্রার গড় ছিল 73·6° এবং শেষ 3 দিনের তাপমাত্রার গড় ছিল 73·7°, বুধবার মধ্যাহ্নের তাপমাত্রা কত ছিল ?

16. তিনটি সংখ্যার গড় 77 ; প্রথম সংখ্যাটি দ্বিতীয়টির দ্বিগুণ এবং দ্বিতীয় সংখ্যাটি তৃতীয়টির দ্বিগুণ। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

17. কোন একটি গ্রামের লোকসংখ্যা 1961 সালে 12500 ; 1981 সালে তা বেড়ে দাঁড়িয়েছে 13460 ; বছরে লোকসংখ্যা বৃদ্ধির গড় কত ?

18. কোন বিদ্যালয়ের কোন এক শ্রেণীর 15 জন ছাত্রের বয়সের গড় 10 বছর। সেই শ্রেণীতে যদি 14, 15 ও 19 বছর বয়সের 3 জন ছাত্র নতুন ভর্তি হয়, তবে ঐ শ্রেণীতে ছাত্রদের বয়সের গড় কত হবে ?

19. একজন কৃষক তার 15 বিঘা জমি থেকে গত বছর বিঘায় গড়ে 3·8 কুইন্টাল ধান পেয়েছিলেন। এ বছর 6 বিঘা জমিতে উচ্চফলনশীল ধান লাগিয়ে তাতে বিঘায় গড়ে 5·5 কুইন্টাল ধান পেয়েছেন এবং বাকি জমি থেকে মোট 40·5 কুইন্টাল ধান পেয়েছেন। গত বছরের তুলনায় তার গড় ফলন বেশী না কম হয়েছে এবং তার পরিমাণ কত ?

20. একটি যন্ত্রাংশ তৈরির কারখানায় বছরের প্রথম পাঁচ মাসে যথাক্রমে 100, 120, 130, 125 ও 150টি যন্ত্রাংশ তৈরি হয়েছে। প্রথম পাঁচ মাসের উৎপাদনের গড় কত ? ঐ হারে কারখানার বার্ষিক উৎপাদনের পরিমাণ কত হবে ?

21. ক ও খ-এর গড় আয় 505 টাকা, খ ও গ-এর গড় আয় 535 টাকা এবং ক ও গ-এর গড় আয় 520 টাকা। ক, খ ও গ প্রত্যেকের প্রকৃত আয় কত ?

22. কোন এক বছর জুন থেকে সেপ্টেম্বর পর্যন্ত মাসিক বৃষ্টিপাত যথাক্রমে 12·5 সেমি, 27·04 সেমি, 20·05 সেমি ও 6·29 সেমি। ঐ চারমাসের দৈনিক বৃষ্টিপাতের গড় কত ?

23. রাম, হরি ও মঞ্জুর বয়সের গড় 16 বছর এবং হরি, মঞ্জু ও নমিতার বয়সের গড় 12 বছর। রামের বয়স যদি 15 বছর হয়, তবে নমিতার বয়স কত হবে ?

24. একজন ব্যাটসম্যান একাদশতম ইনিংসে 100 রান করায় তার ইনিংসে রানসংখ্যার গড় পূর্বের চেয়ে 5 বৃদ্ধি পেয়েছে। একাদশতম ইনিংসের পর তার রানসংখ্যার গড় কত হয়েছে ?

25. ক ও খ প্রত্যেকে 28 রানে 8টি করে উইকেট পেয়েছে। পরে ক 35 রানে একটি এবং খ 56 রানে 4টি উইকেট পায়। উইকেট পাওয়ার গড় কার অপেক্ষাকৃত ভাল ?

26. একটি ট্রেন গড়ে ঘণ্টায় 45 কিমি বেগে কলকাতা থেকে মধুপুরে যায়। পরে গড়ে ঘণ্টায় 36 কিমি বেগে ফিরে আসে। যাতায়াতে ট্রেনটির গড় বেগ কত ছিল ?

ভারযুক্ত গড় :

এতক্ষণ গড় সম্বন্ধে যে সব আলোচনা করা হয়েছে তাতে প্রতিটি রাশির আলাদা আলাদা মান ছিল। কিন্তু এমন ক্ষেত্র হতে পারে যেখানে একই মানের একাধিক সংখ্যক রাশি থাকতে পারে এবং ভিন্ন ভিন্ন মানের বিভিন্ন সংখ্যক রাশি থাকতে পারে। সেসব ক্ষেত্র মান ও রাশির সংখ্যার গুরুত্ব অনুসারে গড় মানের পরিমাণ ঠিক হবে। একটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি দেখা যাক।

তোমরা তোমাদের গ্রামের পাঠাগারের জন্য 5 টাকা দামের 14টি, 4 টাকা দামের 22টি এবং 3 টাকা দামের 64টি বই কিনেছ। বই-এর গড় ক্রয়মূল্য কত হয়েছে ?

বইয়ের দাম দেখে মনে হতে পারে গড় ক্রয়মূল্য হবে (5+4+3) টাকা÷3=4 টাকা। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে গড় ক্রয়মূল্য তা হবে না।

যেহেতু 3 টাকা দামের বই অনেক বেশী ক্রয় করা হয়েছে তাই গড় ক্রয়মূল্য 4 টাকা না হয়ে 3 টাকার কাছাকাছি হবে।

কি করে তা হয় দেখ :

5 টাকা হিসাবে 14টি বইয়ের দাম (5×14) টাকা= 70 টাকা
4 টাকা হিসাবে 22টি বইয়ের দাম (4×22) টাকা= 88 টাকা
3 টাকা হিসাবে 64টি বইয়ের দাম (3×64) টাকা=192 টাকা

বইয়ের মোট সংখ্যা=100 মোট ক্রয়মূল্য=350 টাকা

সুতরাং বইয়ের গড় ক্রয়মূল্য = $\frac{350}{100}$ টাকা = 3·50 টাকা।

তাহলে দেখা যাচ্ছে এখানে গড় মান কেবল রাশিগুলোর মানের উপরই নির্ভর করছে না, কোন মানের কতগুলো রাশি আছে তার উপরও নির্ভর করছে। কোন প্রদত্ত মানের কতগুলো রাশি আছে তাকে সেই মানের ভার বা গুরুত্ব বলা হয়। সুতরাং বলা যায় যে মানগুলোর কোনটির গুরুত্ব কত তার ওপর গড় নির্ভর করছে। তাই অনুরূপ ক্ষেত্রে নির্ণীত গড়কে ভারযুক্ত গড় (Weighted Average) বলা হয়।

বীজগাণিতিক সূত্র :

সাধারণ গড়ের মতো গুরুত্বসহ বা ভারযুক্ত গড়কেও বীজগাণিতিক

সাধারণ সূত্রবদ্ধ করা যায়। নিচে বিভিন্ন মান এবং সেই মানবিশিষ্ট রাশির সংখ্যা দিয়ে একটি তালিকা দেওয়া আছে। গড়মান নির্ণয় করতে হবে।

মান	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
ভার	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_{n-1}	x_n

উপরের তালিকা থেকে পাওয়া যায়

x_1 সংখ্যক রাশির মোট মান a_1x_1
x_2 „ „ „ a_2x_2
x_3 „ „ „ a_3x_3
……………………………………
x_{n-1} „ „ „ $a_{c-1}x_{n-1}$
x_n „ „ „ a_cx_n

রাশির মোট সংখ্যা $(x_1+x_2+\cdots+x_r)$ মোট মানসমষ্টি $(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)$

সুতরাং যদি গড় মান A হয়, তবে

$$A=\frac{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots\cdots+a_rx_n}{x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n}$$

বাস্তব সমস্যায় বীজগাণিতিক সূত্রটির প্রয়োগ দেখ :

কোন একটি বিদ্যালয়ের অষ্টম শ্রেণীর 40 জন ছাত্রের উচ্চতা মেপে নিম্নলিখিত তথ্য পাওয়া গেল। ঐ শ্রেণীর ছাত্রদের গড় উচ্চতা নির্ণয় করতে হবে।

প্রাপ্ত বিবরণ :

ছাত্রসংখ্যা 7 জন প্রত্যেকের উচ্চতা 1 মি 43 সেমি=1·43 মি
„ 11 „ „ „ 1 মি 45 সেমি=1·45 মি
„ 16 „ „ „ 1 মি 47 সেমি=1·47 মি
„ 4 „ „ „ 1 মি 48 সেমি=1·48 মি
„ 2 „ „ „ 1 মি 50 সেমি=1·50 মি

উপরোক্ত বিবরণগুলি বীজগাণিতিক সূত্রে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়।

$x_1 = 7$ এর প্রত্যেকের উচ্চতা $a_1 = 1{\cdot}43$ মি
$x_2 = 11$ " " " $a_2 = 1{\cdot}45$ মি
$x_3 = 16$ " " " $a_3 = 1{\cdot}47$ মি
$x_4 = 4$ " " " $a_4 = 1{\cdot}48$ মি
$x_5 = 2$ " " " $a_5 = 1{\cdot}50$ মি

অতএব 1·43 মি উচ্চতা বিশিষ্ট 7 জনের মোট উচ্চতা

$$a_1x_1 = (1{\cdot}43 \times 7) \text{ মি} = 10{\cdot}01 \text{ মি}$$

1·45 মি উচ্চতা বিশিষ্ট 11 জনের মোট উচ্চতা

$$a_2x_2 = (1{\cdot}45 \times 11) \text{ মি} = 15{\cdot}95 \text{ মি}$$

1·47 মি উচ্চতা বিশিষ্ট 16 জনের মোট উচ্চতা

$$a_3x_3 = (1{\cdot}47 \times 16) \text{মি} = 23{\cdot}52 \text{ মি}$$

1·48 মি উচ্চতা বিশিষ্ট 4 জনের মোট উচ্চতা

$$a_4x_4 = (1{\cdot}48 \times 4) \text{ মি} = 5{\cdot}92 \text{ মি}$$

1·50 মি উচ্চতা বিশিষ্ট 2 জনের মোট উচ্চতা

$$a_5x_5 = (1{\cdot}50 \times 2) \text{ মি} = 3{\cdot}00 \text{ মি}$$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40$ এবং

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 58{\cdot}40 \text{ মি}$$

$$\text{নির্ণেয় গড় উচ্চতা} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}$$

$$= \frac{58{\cdot}40}{40} \text{ মি} = 1{\cdot}46 \text{ মি।}$$

উদাহরণ 1. একজন ব্যবসায়ী 2·90 টাকা দরে 15 কেজি, 3·10 টাকা দরে 12 কেজি এবং 3·48 টাকা দরে 7 কেজি চাল ক্রয় করেন। এতে তাঁর কেজি প্রতি কত টাকা ক্রয়মূল্য পড়ে ?

2·90 টাকা দরে 15 কেজির দাম (2·90 × 15) টাকা = 43·50 টাকা
3·10 টাকা দরে 12 কেজির দাম (3·10 × 12) টাকা = 37·20 টাকা
3·48 টাকা দরে 7 কেজির দাম (3·48 × 7) টাকা = 24·36 টাকা

34 কেজির দাম 105·06 টাকা

∴ গড় ক্রয়মূল্য $= \frac{105·06}{34}$ টাকা $=$ 3·09 টাকা।

প্রশ্নমালা 3

1. একটি আম বাগানে 7টি গাছের প্রত্যেকটিতে 520, 11টি গাছের প্রত্যেকটিতে 484 এবং 6টি গাছের প্রত্যেকটিতে 566 করে আম ফলেছে। বাগানটিতে গাছ পিছু গড়ে কটি করে আম ফলেছে?

2. বন্যাত্রাণের জন্য একটি বিদ্যালয়ের পঞ্চম শ্রেণীর ছাত্ররা প্রত্যেকে 1·20 টাকা, ষষ্ঠ শ্রেণীর ছাত্ররা প্রত্যেকে 1·30 টাকা এবং সপ্তম শ্রেণীর ছাত্ররা প্রত্যেকে 1·58 টাকা করে চাঁদা দিয়েছে। যদি পঞ্চম, ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 77, 68, 65 হয়, তবে ছাত্ররা গড়ে কত টাকা করে চাঁদা দিয়েছে?

3. কোন মাসে তোমাদের বিদ্যালয় 23 দিন খোলা ছিল। তোমাদের শ্রেণীতে 4 দিন 43 জন করে, 6 দিন 47 জন করে, 12 দিন 51 জন করে এবং 1 দিন 38 জন ছাত্র উপস্থিত ছিল। দৈনিক গড় উপস্থিতি কত ছিল?

4. ক্লেডস্‌ লাইব্রেরীর জন্য 5·80 টাকা, 7·00 টাকা ও 12 টাকা মূল্যের যথাক্রমে 90, 48 ও 30টি বই কেনা হয়েছে। বইয়ের গড় মূল্য কত পড়েছে?

5. কোন মাসে প্রথম 7 দিন গড়ে 1·70 সেমি, পরের 15 দিন গড়ে 1·30 সেমি এবং শেষ 8 দিন গড়ে ·65 সেমি বৃষ্টিপাত হয়েছে। ঐ মাসে দিনে গড় বৃষ্টিপাত কত?

6. একটি ট্রেন হাওড়া থেকে রওনা হয়ে প্রথম 10 মিনিট গড়ে 400 মি করে, পরের 1 ঘণ্টা 20 মিনিট গড়ে 1 কিমি করে এবং শেষ 50 মিনিট গড়ে 630 মিটার করে ছুটে বর্ধমান পৌঁছায়। ট্রেনটি মিনিটে গড়ে কত মিটার করে ছুটেছিল?

7. একজন কৃষক তাঁর 17 বিঘা জমি থেকে বিঘা প্রতি গড়ে 3·33 কুইন্টাল করে ধান পেয়েছে। যদি তাঁর জমির মধ্যে 8 বিঘায় গড়ে 2·97 কুইন্টাল করে এবং 7 বিঘায় গড়ে 3·35 কুইন্টাল করে ধান ফলে থাকে, তবে বাকি জমিতে মোট কত কুইন্টাল ধান হয়েছিল ?

8. নিচের তালিকায় হরনাথ নিরোদাসুন্দরী ঘোষ বিদ্যামন্দিরের অষ্টম শ্রেণীর ছাত্রদের অংক পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো। ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় কর।

ছাত্রের সংখ্যা	15	18	5	2
প্রত্যেকের প্রাপ্ত নম্বর	30	50	60	80

9. এক সপ্তাহের কোন্ কোন্ দিন কিরূপ তাপমাত্রা ছিল, নিচে তার একটি তালিকা দেওয়া হ'ল। দৈনিক গড় তাপমাত্রা নির্ণয় কর।

বার	সোম ও মঙ্গলবার	বুধ থেকে শুক্রবার	শনিবার ও রবিবার
তাপমাত্রা	28°C	31°C	27°C

10. একটি গ্রামের জনসংখ্যা প্রথম দু'বছর বেড়েছে 105 জন করে, পরের 9 বছর 100 জন করে এবং শেষ 9 বছর 110 জন করে। ঐ গ্রামের জনসংখ্যা বছরে গড়ে কতজন করে বেড়েছে ?

11. দুটি ক্রিকেট টিমের খেলোয়াড়দের রানের বিবরণ নিম্নরূপ। তাদের মধ্যে কোন্ টিমটি গড়ে কত বেশী রান করেছে ?

'ক' টিম

খেলোয়াড়ের সংখ্যা	3	2	5	1
প্রত্যেকের রানের সংখ্যা	8	25	29	102

'খ' টিম

খেলোয়াড়ের সংখ্যা	2	3	1	5
প্রত্যেকের রানের সংখ্যা	16	21	35	80

12. এক ব্যক্তি প্রথম বছর মাইনে পেতেন 530 টাকা, পরের 4 বছর 550 টাকা করে ; শেষ 5 বছর 600 টাকা করে। তার মাইনে বৃদ্ধির বাৎসরিক গড় কত ?

13. একটি বিদ্যালয়ের অষ্টম শ্রেণীর 40 জন ছাত্রের অঙ্ক ও ইংরাজী

বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের তালিকা নিম্নরূপ। তুলনা করে বলতো, কোন্ বিষয়ে গড়ে কত বেশী নম্বর পেয়েছে।

অঙ্ক	ছাত্রের সংখ্যা	11	20	8	1
	প্রত্যেকের প্রাপ্ত নম্বর	34	55	70	86

ইংরাজী	ছাত্রের সংখ্যা	14	20	4	2
	প্রত্যেকের প্রাপ্ত নম্বর	38	46	57	80

14. কোন বিদ্যালয়ে অষ্টম শ্রেণীর 15 জন ছাত্রর উচ্চতার বিবরণ নিম্নরূপ। তাদের গড় উচ্চতা কত ?

ছাত্রের সংখ্যা	3	9	2	1
প্রত্যেকের উচ্চতা	154 সেমি	157 সেমি	160 সেমি	163 সেমি

15. কোন বিদ্যালয়ের অষ্টম শ্রেণীর 25 জন ছাত্রের বয়সের বিবরণ নিম্নরূপ। তাদের গড় বয়স কত ?

ছাত্রের সংখ্যা	7	3	6	9
প্রত্যেকের বয়স	13·7 বছর	14·1 বছর	14·5 বছর	15·2 বছর

16. একটি কারখানার দৈনিক 88 টনের উপর অতিরিক্ত যত টন উৎপাদন হয় প্রতিটি শ্রমিক প্রতি টনের জন্য নিম্নলিখিত হারে ইন্সেন্টিভ পায় ঃ

উৎপাদন	88—94·9 টন	95—99·9 টন	100 টনের বেশী
ইন্সেন্টিভ	·25 টাকা	·50 টাকা	·75 টাকা

তিন মাসের দৈনিক গড় উৎপাদন হয় নিম্নরূপে ঃ

প্রথম মাস	দ্বিতীয় মাস	তৃতীয় মাস
94 টন	96 টন	105 টন

(*i*) কোন্ মাসের দৈনিক গড় ইন্সেন্টিভ কত হবে ? (*ii*) উল্লিখিত তিন মাসে প্রতিটি শ্রমিক গড়ে কত টাকা করে ইন্সেন্টিভ পাবে ? [30 দিনে মাস ধরতে হবে। আর ইন্সেন্টিভ হচ্ছে অতিরিক্ত পরিশ্রমের বিনিময়ে দেয় অতিরিক্ত মজুরি]

তৃতীয় অধ্যায়

সামান্য ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল

ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণীতে তোমরা পূর্ণ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করতে শিখেছ।

ষষ্ঠ শ্রেণীতে পাটীগণিতে দেখেছ :

2 এর বর্গ $= 2^2 = 2 \times 2 = 4$, সুতরাং $\sqrt{4} = 2$

5 এর বর্গ $= 5^2 = 5 \times 5 = 25$, সুতরাং $\sqrt{25} = 5$

আবার, সপ্তম শ্রেণীতে বীজগণিতে দেখেছ :

x এর বর্গ $= x^2 = x \times x$, সুতরাং $\sqrt{x^2} = x$

p এর বর্গ $= p^2 = p \times p$, সুতরাং $\sqrt{p^2} = p$

এবার, সামান্য ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশের বর্গ ও বর্গমূল দেখ :

সামান্য ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে :

$\frac{1}{2}$ এর বর্গ $= (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, সুতরাং $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$ এর বর্গ $= (\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, সুতরাং $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

$\frac{5}{4}$ এর বর্গ $= (\frac{5}{4})^2 = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$, সুতরাং $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

দশমিক ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে :

$\cdot 1$ এর বর্গ $= (\cdot 1)^2 = \cdot 1 \times \cdot 1 = \cdot 01$, সুতরাং $\sqrt{\cdot 01} = \cdot 1$

$\cdot 5$ এর বর্গ $= (\cdot 5)^2 = \cdot 5 \times \cdot 5 = \cdot 25$, সুতরাং $\sqrt{\cdot 25} = \cdot 5$

$1 \cdot 2$ এর বর্গ $= (1 \cdot 2)^2 = 1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 = 1 \cdot 44$, সুতরাং $\sqrt{1 \cdot 44} = 1 \cdot 2$

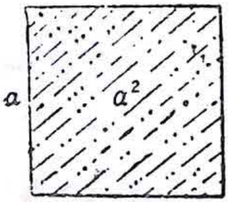
উপরের আলোচনা থেকে সামান্য ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল সম্বন্ধে তোমাদের ধারণা হবে। এবার দেখ, কিভাবে ঐসব ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।

সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় :

ষষ্ঠ শ্রেণীতে তোমরা ছোট ছোট পূর্ণসংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করেছ সংখ্যাটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে। যেহেতু একটি পূর্ণসংখ্যার গুণনীয়কের সংখ্যা সীমিত ও নির্দিষ্ট তাই সংখ্যাটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

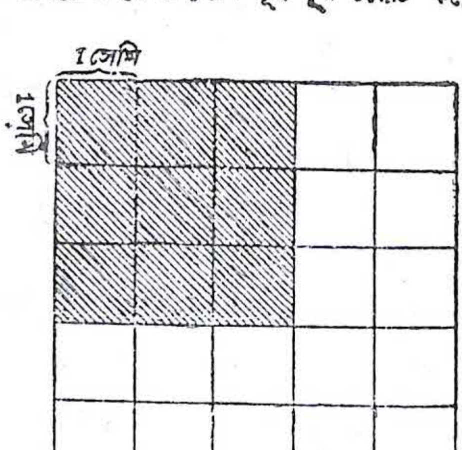
করে বর্গমূল নির্ণয় করা সহজ হয়েছে। কিন্তু সপ্তম শ্রেণীতে তোমরা শিখেছ যে, যে কোন ভগ্নাংশের গুণনীয়ক সংখ্যা অসংখ্য। তাই কোন সামান্য ভগ্নাংশকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে তার বর্গমূল নির্ণয় করা সহজ নয়। আবার ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যেও সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করা যায় না। তাই সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করার একটি যুক্তি-সিদ্ধ পদ্ধতি দেখা যাক।

সপ্তম শ্রেণীতে জ্যামিতিতে এবং ক্ষেত্রফলের অঙ্কে তোমরা দেখেছ :



a^2-এর অর্থ হলো a দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (পাশের চিত্র দেখ)। এখানেও a^2-এর বর্গমূল করলে a পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $\sqrt{a^2}=a$. তাহলে দেখা যাচ্ছে, কোন বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের বর্গমূল করলে যে ফল পাওয়া যায় তা হলো ঐ বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য।

পাশের চিত্রে 5 সেমি বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র আঁকা হয়েছে। ঐ বর্গক্ষেত্রটিকে পাশাপাশি ও উপরে নিচে 1 সেমি দূর দূর চারটি করে লাইন টেনে 25টি বর্গক্ষেত্রে ভাগ করা হয়েছে। প্রতিটি ছোট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 1 বর্গ সেমি এবং গোটা ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 25 বর্গ সেমি।



এবার দেখ দাগ কাটা অংশে 9টি ছোট বর্গক্ষেত্র রয়েছে।

সুতরাং এই অংশের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ সেমি এবং এই অংশটিকে মূল বর্গক্ষেত্রের $\frac{9}{25}$ অংশ বলা যায়।

এখন যদি $\frac{৯}{২৫}$এর বর্গমূল করা যায় তবে কি পাওয়া যাবে ?

পাওয়া যাবে, $\frac{৯}{২৫}$ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গ অংশটি যে বাহুর উপর দাঁড়িয়ে আছে তার দৈর্ঘ্যের পরিমাণ।

চিত্র থেকে দেখতে পাচ্ছ $\frac{৯}{২৫}$ অংশটি মূল বর্গক্ষেত্রের বাহুর $\frac{৩}{৫}$ অংশের উপর দাঁড়িয়ে আছে।

তাই বলা যায় $\sqrt{\frac{৯}{২৫}}=\frac{৩}{৫}$

কিভাবে এই ফল পাওয়া যেতে পারে ?

তোমরা জান 9এর বর্গমূল 3 এবং 25এর বর্গমূল 5

সুতরাং $\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{3\times3}}{\sqrt{5\times5}}=\frac{৩}{৫}$; এভাবে $\frac{৯}{২৫}$এর বর্গমূল পাওয়া যেতে পারে।

সুতরাং সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করার যে নিয়মটি পাওয়া গেল, তা হলো

$$\text{সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল}=\sqrt{\frac{\text{লব}}{\text{হর}}}=\frac{\sqrt{\text{লব}}}{\sqrt{\text{হর}}}=\frac{\text{লবের বর্গমূল}}{\text{হরের বর্গমূল}}$$

উদাহরণ 1. $\frac{৮১}{১২১}$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$\frac{৮১}{১২১}$এর বর্গমূল $=\sqrt{\frac{81}{121}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{121}}=\frac{৯}{১১}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\frac{৯}{১১}$

উদাহরণ 2. $\frac{১৯৬}{৫৬২৫}$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$\frac{196}{5625}$এর বর্গমূল $=\sqrt{\frac{196}{5625}}=\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{5625}}=\frac{১৪}{৭৫}$

কেননা

```
    196 | 14            5625 | 75
    1   |               49   |
24 | 96           145 | 725
   | 96               | 725
```

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\frac{১৪}{৭৫}$

প্রশ্নমালা 4

1. নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলোর বর্গমূল নির্ণয় কর :

(i) $\frac{225}{256}$ (ii) $\frac{169}{529}$ (iii) $\frac{841}{900}$ (iv) $1\frac{496}{729}$
(v) $1\frac{539}{1225}$ (vi) $6\frac{433}{676}$ (vii) $\frac{7921}{9216}$ (viii) $\frac{18496}{50625}$
(ix) $\frac{16384}{21316}$ (x) $1\frac{2355}{5041}$ (xi) $15\frac{385}{576}$ (xii) $82\frac{66}{169}$
(xiii) $109\frac{628}{729}$ (xiv) $\frac{4225}{127449}$ (xv) $14\frac{835}{6241}$ (xvi) $\frac{6889}{11025}$
(xvii) $\frac{2907025}{3171961}$ (xviii) $163\frac{7821}{30625}$ (xix) $\frac{2211169}{29811600}$
(xx) $25840\frac{9}{16}$.

2. কোন্ ভগ্নাংশকে সেই ভগ্নাংশ দিয়ে গুণ করলে গুণফল $4\frac{285}{529}$ হবে ?

3. 'ক' বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 'খ' বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের $\frac{121}{256}$ অংশ। 'ক' বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 'খ' বর্গক্ষেত্রের বাহুর কত অংশ হবে ?

4. $\frac{35}{42}$কে কোন্ ভগ্নাংশ দিয়ে গুণ করলে গুণফলের বর্গমূল 1 হবে ?

5. $\frac{49}{27}$কে সবচেয়ে ছোট কোন্ অখণ্ড সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে গুণফলটি একটি পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ সংখ্যা হবে ?

6. $\frac{121}{144}$এর বর্গমূলকে কত দিয়ে গুণ করলে গুণফল 1 হবে ?

7. AB = 12 একক ; AC = ABএর $\frac{3}{12}$ অংশ।

ABএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, ACএর উপর অংকিত বর্গক্ষেত্রের কত গুণ হবে ? ছবি এঁকে দেখাও।

দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় :

এই অধ্যায়ের প্রথম দিকে তোমরা দেখেছ

$\cdot 1$ এর বর্গ $= (\cdot 1)^2 = \cdot 1 \times \cdot 1 = \cdot 01$, সুতরাং $\sqrt{\cdot 01} = \cdot 1$

$1\cdot 2$ এর বর্গ $= (1\cdot 2)^2 = 1\cdot 2 \times 1\cdot 2 = 1\cdot 44$, সুতরাং $\sqrt{1\cdot 44} = 1\cdot 2$

এ থেকে দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করা সম্পর্কে তোমাদের কোন ধারণা হয় কি ?

মনে কর ·01, ·81, 1·21, ·0009 এদের বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।

তোমরা দশমিক ভগ্নাংশকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করতে জান। আবার এইমাত্র সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করার নিয়ম শিখলে।

তাই এসব দশমিক ভগ্নাংশকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করে তার বর্গমূল নির্ণয় করে তাকে পরে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে পার। যেমন,

$$\cdot01 \text{এর বর্গমূল} = \sqrt{\cdot01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = \cdot1$$

$$\cdot81 \text{এর বর্গমূল} = \sqrt{\cdot81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10} = \cdot9$$

$$1\cdot21 \text{এর বর্গমূল} = \sqrt{1\cdot21} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{100}} = \frac{11}{10} = 1\cdot1$$

$$\cdot0009 \text{এর বর্গমূল} = \sqrt{\cdot0009} = \sqrt{\frac{9}{10000}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10000}}$$

$$= \frac{3}{100} = \cdot03$$

উদাহরণ 1. ·0064 এবং ·0196এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\cdot0064 \text{এর বর্গমূল} = \sqrt{\cdot0064} = \sqrt{\frac{64}{10000}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{10000}}$$

$$= \frac{8}{100} = \cdot08$$

$$\cdot0196 \text{এর বর্গমূল} = \sqrt{\cdot0196} = \sqrt{\frac{196}{10000}} = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{10000}}$$

$$= \frac{14}{100} = \cdot14$$

উদাহরণ 2. 2·25, 13·69 এবং 1·4641এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$2\cdot25 \text{এর বর্গমূল} = \sqrt{2\cdot25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1\cdot5$$

$$13\cdot69 \text{এর বর্গমূল} = \sqrt{13\cdot69} = \sqrt{\frac{1369}{100}} = \frac{\sqrt{1369}}{\sqrt{100}}$$

$$= \frac{37}{10} = 3\cdot7$$

$$1\cdot4641 \text{এর বর্গমূল} = \sqrt{1\cdot4641} = \sqrt{\frac{14641}{10000}} = \frac{\sqrt{14641}}{\sqrt{10000}}$$

$$= \frac{121}{100} = 1\cdot21$$

কিন্তু সংখ্যাটি যদি বেশ বড় হয় তবে এভাবে সামান্য ভগ্নাংশে

পরিণত করে বর্গমূল নির্ণয় করা অসুবিধাজনক এবং তাতে বেশ সময় নষ্ট হয়। তাই বড় দশমিক সংখ্যার বর্গমূল ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে করা অনেক সুবিধাজনক।

ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় :

সপ্তম শ্রেণীতে তোমরা ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে কেবল পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করেছ। এখানেই প্রথম বর্গ দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে। কোন দশমিক সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করে যদি একটি সসীম দশমিক সংখ্যা পাওয়া যায় তবে মূল সংখ্যাটিকে একটি বর্গ দশমিক সংখ্যা বলা যায়।

নিচের উদাহরণগুলো লক্ষ্য কর :

$(\cdot1)^2=\cdot1\times\cdot1=\cdot01$, সুতরাং $\sqrt{\cdot01}=\cdot1$

$(\cdot3)^2=\cdot3\times\cdot3=\cdot09$, সুতরাং $\sqrt{\cdot09}=\cdot3$

$(\cdot9)^2=\cdot9\times\cdot9=\cdot81$, সুতরাং $\sqrt{\cdot81}=\cdot9$

$(\cdot12)^2=\cdot12\times\cdot12=\cdot0144$, সুতরাং $\sqrt{\cdot0144}=\cdot12$

$(\cdot36)^2=\cdot36\times\cdot36=\cdot1296$, সুতরাং $\sqrt{\cdot1296}=\cdot36$

$(\cdot013)^2=\cdot013\times\cdot013=\cdot000169$, সুতরাং $\sqrt{\cdot000169}=\cdot013$

$(\cdot112)^2=\cdot112\times\cdot112=\cdot012544$, সুতরাং $\sqrt{\cdot012544}=\cdot112$

উপরের উদাহরণগুলোতে কয়েকটি বিষয় দেখা যায় :

(1) প্রতি বর্গ দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পর জোড় সংখ্যক অঙ্ক আছে।

বিঃ দ্রঃ দশমিকের গুণের নিয়মটি মনে করে কেন এমন হয় বল দেখি।

(2) আবার দেখ, মূল সংখ্যাটিতে দশমিক বিন্দুর পর যত অঙ্ক আছে বর্গমূলে দশমিক বিন্দুর পর তার অর্ধেক অঙ্ক আছে।

ভাগ প্রক্রিয়ায় বর্গমূল নির্ণয় করার সময় দেখা যাচ্ছে প্রদত্ত সংখ্যার দশমিক বিন্দুর পরের প্রতি দুটি অঙ্কের জন্য বর্গমূলে দশমিক বিন্দুর পরে

একটি করে অঙ্ক আসবে। তাই দশমিক বিন্দুর পরের অঙ্কগুলোকে বাঁদিক থেকে জোড় বাঁধতে হবে। অবশ্য দশমিক অংশের সঙ্গে যদি পূর্ণসংখ্যা থাকে, তবে সেই পূর্ণসংখ্যার অঙ্কগুলোকে আগের মতো একক স্থানীয় অঙ্ক থেকে বাঁদিকে জোড় বেঁধে নিতে হবে।

এই সঙ্গে আরও একটি নিয়ম অনুসরণ করতে হবে, তা হলো দশমিক বিন্দুর পরের অঙ্ক জোড়া নেওয়ার শুরুতেই বর্গমূলের ঘরে দশমিক বিন্দু দিয়ে দিতে হবে ; অর্থাৎ ভাগ প্রক্রিয়ায় যখনই দশমিকাংশের প্রথম জোড়টি কেটে আনা হবে তখনই বর্গমূলে দশমিক বিন্দুটি দিয়ে দিতে হবে।

উদাহরণ 1. ·020736এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{r|l}
 & \cdot\overrightarrow{02}\overrightarrow{07}\overrightarrow{36}\ (\cdot 144 \\
 & 1 \\
\hline
24 & 107 \\
 & 96 \\
\hline
284 & 1136 \\
 & 1136 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \cdot 144$

উদাহরণ 2. 170·485249এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{r|l}
 & \overleftarrow{170}\cdot\overrightarrow{48}\overrightarrow{52}\overrightarrow{49}\ (13\cdot 057 \\
 & 1 \\
\hline
23 & 70 \\
 & 69 \\
\hline
2605 & 14852 \\
 & 13025 \\
\hline
26107 & 182749 \\
 & 182749 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= 13\cdot 057$

প্রশ্নমালা 5

1. নিম্নলিখিত দশমিক ভগ্নাংশগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর।

(*i*) 0·49 (*ii*) 0·0144 (*iii*) ·0081

(*iv*) 0·3136 (*v*) 0·7569 (*vi*) 0·8836

(vii) 12·25 (viii) 32·49 (ix) 55·0564
(x) 3·4596 (xi) 0·000169 (xii) 0·050625
(xiii) 121·4404 (xiv) 186·5956 (xv) 76·195441
(xvi) 273·5716 (xvii) 7468·4164 (xviii) 781·2025

2. 0·032 ও ·2এর গুণফলের বর্গমূল নির্ণয় কর।

3. কোন্ দশমিক ভগ্নাংশকে সেই দশমিক ভগ্নাংশ দিয়ে গুণ করলে গুণফল 1·1025 হয়?

4. যে বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 4·1209 বর্গমিটার তার বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

5. 3·24 বর্গমিটার ও 2·52 বর্গমিটার ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

6. ·75-এর সঙ্গে কত দশমিক ভগ্নাংশ যোগ করলে তার বর্গমূল 1 হবে?

7. 48·03 থেকে কোন্ সংখ্যা বিয়োগ করলে বিয়োগফলের বর্গমূল হবে 5·7?

8. 1·4641 বর্গমিটার ও 1·0609 বর্গমিটার ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর নির্ণয় কর।

পূর্ণবর্গ নয় এমন সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়:

ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণীতে তোমরা পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করেছ।

এই অধ্যায়ে পূর্ণবর্গ সামান্য ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করতে শিখেছ। এবার পূর্ণবর্গ নয় এমন সংখ্যার বর্গমূল কি করে নির্ণয় করা যায় দেখ।

তোমরা জান এক অঙ্কের সংখ্যাগুলোর মধ্যে 2, 3, 5, 6, 7, 8 এই সংখ্যাগুলো পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়।

আবার সপ্তম শ্রেণীতে দেখেছ দুই বা ততোধিক অঙ্কের পূর্ণবর্গ সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক অবশ্যই 0, 1, 4, 5, 6, 9এর যে কোন একটি হতে হবে। অবশ্য এর অর্থ এই নয় যে একক স্থানীয় অঙ্ক এই অঙ্কগুলোর যে কোন একটি থাকলেই সেই সংখ্যা পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে। তা পূর্ণবর্গ সংখ্যা হতেও পারে আবার নাও হতে পারে। তবে

এই অঙ্কগুলো ভিন্ন অন্য কোন অঙ্ক, অর্থাৎ 2, 3, 7, 8 থাকলে সেই সংখ্যা কখনই পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে না। তাহলে দেখা যাচ্ছে এমন বহু সংখ্যা আছে যারা পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়। সেসব সংখ্যার বর্গমূল সম্পর্কে আমরা একটা ধারণা পেতে পারি তাদের আসন্নমান থেকে। নিচে তারই আলোচনা করা হল।

মনে কর 2এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।

যেহেতু 2 সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয় তাই এমন কোন পরিচিত সংখ্যা পাবে না যার বর্গ 2 হবে। তোমরা জান যে কোন পূর্ণসংখ্যার এককের ঘরের ডান পাশে একটি অলিখিত দশমিক বিন্দু আছে এবং সেই বিন্দুর পরে অসংখ্য 0 (শূন্য) আছে। সুতরাং ভাগ প্রক্রিয়ার দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয়ের পদ্ধতির সাহায্যে পূর্ণবর্গ নয় এরূপ যেকোন সংখ্যার বর্গমূল যেকোন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় করা যায়। 2এর বর্গমূল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে পদ্ধতিটি কিভাবে প্রয়োগ করবে দেখ :

উদাহরণ 1.

```
        2·00 00 00 ( 1·414
        1
24   )  100
         96
281  )   400
         281
2824 )  11900
        11296
          604
```

সুতরাং $\sqrt{2} = 1{\cdot}414......$

মন্তব্য : লক্ষ্য কর, 2এর বর্গমূল তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করা হয়েছে। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে বর্গমূলটি হয় একটি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা। সপ্তম শ্রেণীতে তোমরা অসীম ভগ্নাংশকে প্রয়োজনমতো আসন্নমানে প্রকাশ করার পদ্ধতি শিখেছ। সেইমতো এখানে বর্গমূলটিকে দুই, তিন, চার ইত্যাদি অঙ্কবিশিষ্ট মানে প্রকাশ করতে পারবে।

উদাহরণ 2. 3এর বর্গমূল তিন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3\cdot\overrightarrow{00}\,\overrightarrow{00}\,\overrightarrow{00}\;(1\cdot732 \\
 & 1 \\
\hline
27 & 200 \\
 & 189 \\
\hline
343 & 1100 \\
 & 1029 \\
\hline
3462 & 7100 \\
 & 6924 \\
\hline
 & 176
\end{array}
$$

সুতরাং $\sqrt{3}=1\cdot732\ldots\ldots$

তোমরা এবার 5, 6, 7 প্রভৃতি সংখ্যাগুলোর বর্গমূল কত হয় দেখতো।

উদাহরণ 3. 257এর বর্গমূল তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{r|l}
 & \overleftarrow{2}\,\overrightarrow{57}\cdot\overrightarrow{00}\,\overrightarrow{00}\,\overrightarrow{00}\;(16\cdot031 \\
 & 1 \\
\hline
26 & 157 \\
 & 156 \\
\hline
3203 & 10000 \\
 & 9609 \\
\hline
32061 & 39100 \\
 & 32061 \\
\hline
 & 7039
\end{array}
$$

সুতরাং নির্ণেয় বর্গমূল $=16\cdot031\ldots$

পূর্ণবর্গ নয় এরূপ সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় :

মনে কর $\frac{3}{7}$এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান)। তোমরা নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ $\frac{3}{7}$ পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ সংখ্যা নয়। দু'ভাবে অনুরূপ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করা যায় :

প্রথম পদ্ধতি : প্রথমে $\frac{3}{7}$কে দশমিক বিন্দুর পর একটি নির্দিষ্ট অঙ্ক পর্যন্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত কর। পরে দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করার পদ্ধতিতে তার বর্গমূল নির্ণয় করে আসন্নমান লও।

মন্তব্য : বর্গমূল যত দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মানে নির্ণয় করতে বলা হবে, বর্গমূলে দশমিক অঙ্ক তার এক অঙ্ক বেশী থাকবে। সুতরাং

সামান্য ভগ্নাংশটিকে তার দ্বিগুণ সংখ্যক দশমিক অঙ্কে প্রকাশ করতে হবে। এক্ষেত্রে যেহেতু বর্গমূল তিন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মানে পেতে হবে, সুতরাং $\frac{3}{7}$কে 8 অঙ্ক পর্যন্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে বর্গমূল করতে হবে।

$\frac{3}{7}$এর বর্গমূল $=\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\cdot 42857142}=\cdot 6546=\cdot 655$

কেননা

```
        ·42857142(·6546
         36
  125)  685
        625
  1304) 6071
        5216
 13086) 85542
        78516
         7026
```

দ্বিতীয় পদ্ধতি : $\frac{3}{7}$এর হরকে 7 দিয়ে গুণ করলে তা পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে। আবার হরকে কোন সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে লবকেও সেই সংখ্যা দিয়ে গুণ করতে হবে। সুতরাং সংখ্যাটি দাঁড়াবে $\frac{21}{49}$.

এবার $\frac{21}{49}$এর বর্গমূল $=\sqrt{\frac{21}{49}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\because \quad \sqrt{21}=4\cdot 5825$

$\therefore \quad \frac{3}{7}$এর বর্গমূল $=\frac{4\cdot 5825\cdots}{7}$

$=\cdot 6546\cdots$

$=\cdot 655$

```
        21(4·5825
        16
   85)  500
        425
  908)  7500
        7264
 9162)  23600
        18324
91645)  527600
        458225
         69375
```

মন্তব্য : এ নিয়মে সব সময়েই হরকে পূর্ণবর্গ সংখ্যা করে নিতে হবে।

প্রশ্নমালা 6

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলোর বর্গমূল নির্ণয় কর (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান) ঃ

(*i*) 5 (*ii*) 7 (*iii*) 12 (*iv*) 37 (*v*) 86
(*vi*) 115 (*vii*) 257 (*viii*) 709 (*ix*) 1133
(*x*) 5055 (*xi*) 6297 (*xii*) 9029 (*xiii*) 11523.

2. নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলোর বর্গমূল নির্ণয় কর (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান) ঃ

(*i*) $\frac{11}{23}$ (*ii*) $\frac{1}{7}$ (*iii*) $\frac{3}{5}$ (*iv*) $5\frac{3}{7}$ (*v*) $8\frac{1}{3}$
(*vi*) $\frac{387}{455}$ (*vii*) $\frac{11086}{13833}$ (*viii*) $70\frac{32}{27}$ (*ix*) $\frac{3}{5}$.

3. নিম্নলিখিত দশমিক ভগ্নাংশগুলোর বর্গমূল নির্ণয় কর (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান) ঃ

(*i*) 0·4 (*ii*) 2·5 (*iii*) 0·223
(*iv*) 0·2327 (*v*) 0·19941 (*vi*) 14·21021
(*vii*) 0·00123 (*viii*) 10·4752 (*ix*) 101·02027
(*x*) 115·23697 (*xi*) 279·007302.

চতুর্থ অধ্যায়
সময় ও দূরত্ব

সপ্তম শ্রেণীতে সময় ও দূরত্বের অঙ্ক তোমরা করেছ। সেখানে গতিবেগ সম্পর্কে তোমাদের একটি ধারণাও হয়েছে। দেখেছ গতিবেগ দু'প্রকার—সমগতিবেগ ও অসমগতিবেগ। সময় ও দূরত্ব সম্পর্কিত সমস্যায় তোমরা যে বিষয়গুলো পেয়েছ তারা হ'ল :

(1) গতিবেগ : গতিবেগের ধারণাটিতে দু'টি বিষয় রয়েছে—

(i) একক সময়, (ii) একক সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব।

অর্থাৎ যখনই বলা হয় ট্রেনটির গতিবেগ ঘণ্টায় 60 কিমি, তখনই তার অর্থ হয় ট্রেনটি 1 ঘণ্টায় 60 কিমি পথ অতিক্রম করে।

(2) মোট সময় : কোন একটি বিশেষ সমস্যায় গতিশীল বস্তুটি যতক্ষণ ধরে চলতে থাকে তাকে সেই সমস্যার মোট সময় বলা যায়।

(3) অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব : কোন একটি বিশেষ সমস্যায় গতিশীল বস্তুটি প্রদত্ত মোট সময়ে মোট যতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করে, তাকে সেই সমস্যার অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব বলা যায়।

আবার এই তিনটি বিষয়ের পারস্পরিক সম্পর্কের ভিত্তিতে তিনটি সূত্র পেয়েছ :

(1) $\text{গতিবেগ} = \dfrac{\text{অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}}$

(2) $\text{অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব} = \text{গতিবেগ} \times \text{মোট সময়}$

(3) $\text{মোট সময়} = \dfrac{\text{অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব}}{\text{গতিবেগ}}$

উপরোক্ত সূত্রগুলোর উপর ভিত্তি করে কয়েকটি সমস্যা আলোচনা করা হলো।

উদাহরণ 1. একটি মালগাড়ি সমগতিতে 9 ঘণ্টায় 324 কিমি দূরে একটি গন্তব্যস্থানে যাবে বলে রওনা হলো। 5 ঘণ্টা চলার পর

তার ইঞ্জিনে গোলমাল দেখা দেওয়ায় তার গতিবেগ ঘণ্টায় 12 কিমি হ্রাস করতে হলো। গাড়িটি নির্ধারিত সময়ের কত ঘণ্টা পর গন্তব্যস্থলে পৌঁছবে ?

সমস্যাটি বিশ্লেষণ করলে এতে 5টি অংশ দেখতে পাবে :

(i) 9 ঘণ্টায় 324 কিমি যেতে হবে—এ থেকে নির্ধারিত গতিবেগ নির্ণয় করতে হবে।

(ii) নির্ধারিত গতিবেগে 5 ঘণ্টা চলতে পারায় মোট কত দূরত্ব যেতে পারলো তা নির্ণয় করতে হবে।

(iii) 5 ঘণ্টার পর আরও কত দূরত্ব যেতে বাকি রইলো—তা নির্ণয় করতে হবে।

(iv) গতিবেগ ঘণ্টায় 12 কিমি হ্রাস হওয়ার ফলে যে গতিবেগ হবে সেই গতিবেগে বাকি দূরত্ব যেতে কত সময় লাগবে তা নির্ণয় করতে হবে।

(v) নির্ধারিত সময় ছিল 9 ঘণ্টা, এখন বাস্তবে মোট কত সময় লেগেছে তা থেকে কত সময় বেশী লেগেছে তা নির্ণয় করতে হবে। ধাপে ধাপে অঙ্কটি কষা যাক—

(1) গাড়িটি 9 ঘণ্টায় 324 কিমি যাবে বলে ঠিক ছিল

" 1 " $\frac{324}{9}$ " $=36$ কিমি যাবে বলে ঠিক ছিল।

সুতরাং নির্ধারিত গতিবেগ ছিল ঘণ্টায় 36 কিমি।

(2) গাড়িটি 1 ঘণ্টায় যায় 36 কিমি

" 5 " যাবে (36×5) কিমি$=180$ কিমি

সুতরাং, ইঞ্জিনে গোলমাল হওয়ার আগে পর্যন্ত 5 ঘণ্টায় গাড়িটি 180 কিমি পথ যাবে।

(3) তাই গন্তব্যস্থানে পৌঁছতে গাড়িটিকে আরও $(324-180)$ কিমি$=144$ কিমি পথ যেতে হবে।

(4) ইঞ্জিনে গোলমাল হওয়ায় তখন গাড়িটি চলবে ঘণ্টায় $(36-12)$ কিমি$=$ঘণ্টায় 24 কিমি গতিবেগে।

গাড়িটি 24 কিমি যাবে 1 ঘণ্টায়

∴ গাড়িটি 1 কিমি যাবে $\frac{1}{24}$ ঘণ্টায়

∴ „ 144 „ „ $(\frac{1}{24} \times 144)$ ঘণ্টায় = 6 ঘণ্টায়

(v) গন্তব্যস্থলে পৌঁছনোর জন্য নির্ধারিত সময় ছিল 9 ঘণ্টা।

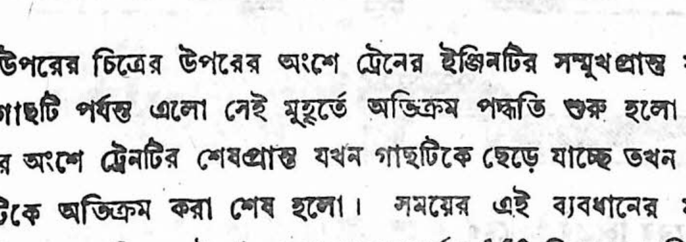
কিন্তু কার্যক্ষেত্রে মোট সময় লেগেছে (5+6) ঘণ্টা = 11 ঘণ্টা

গাড়িটি নির্ধারিত সময়ের (11−9) ঘণ্টা = 2 ঘণ্টা পর গন্তব্যস্থলে পৌঁছবে।

গতিশীল বস্তুটির যদি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য থাকে এবং তাকে যদি কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অথবা অপর একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের বস্তু অতিক্রম করতে হয় তো কি হয় দেখ :

উদাহরণ 2. রেল লাইনের পাশে একটি তালগাছ রয়েছে। ঘণ্টায় 45 কিমি বেগে ধাবমান 150 মিটার লম্বা একটি ট্রেন কত সময়ে ঐ তালগাছটি অতিক্রম করবে ?

নিচের ছবিতে ঘটনাটি দেখ—



উপরের চিত্রের উপরের অংশে ট্রেনের ইঞ্জিনটির সম্মুখপ্রান্ত যখন তালগাছটি পর্যন্ত এলো সেই মুহূর্তে অতিক্রম পদ্ধতি শুরু হলো এবং নিচের অংশে ট্রেনটির শেষপ্রান্ত যখন গাছটিকে ছেড়ে যাচ্ছে তখন তার গাছটিকে অতিক্রম করা শেষ হলো। সময়ের এই ব্যবধানের মধ্যে ট্রেনটিকে তার নিজের দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব অর্থাৎ 150 মি দূরত্ব অতিক্রম করতে হয়েছে। (এখানে তালগাছের অনুভূমিক দৈর্ঘ্যকে ধরা হচ্ছে না। যে সব বস্তুর অনুভূমিক দৈর্ঘ্যকে ধরা হবে না, তাদের একটি বিন্দু হিসাবে বিচার করা হয়।)

তাই বলা যায় নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোন একটি গতিশীল বস্তুকে কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অতিক্রম করতে তার নিজের দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব অতিক্রম করতে হয়। এখানে ঐকিক নিয়মের সাহায্যে সময় নির্ণয় করা যায়।

45 কিমি বা 45000 মিটার যেতে ট্রেনটির 1 ঘণ্টা বা (60×60) সেকেণ্ড সময় লাগে।

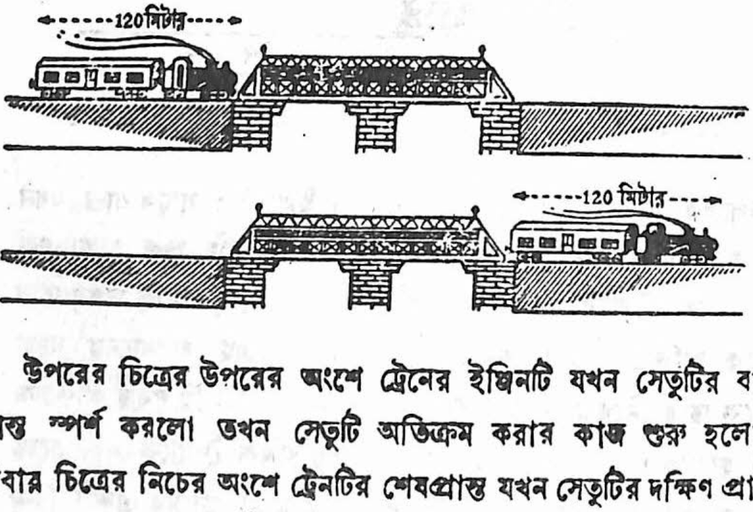
∴ 1 মিটার যেতে ট্রেনটির $\frac{60\times60}{45000}$ সেকেণ্ড সময় লাগবে

∴ 150 মিটার যেতে ট্রেনটির $\left(\frac{60\times60}{45000}\times150\right)$ সেকেণ্ড
$=12$ সেকেণ্ড সময় লাগবে।

∴ তালগাছটিকে অতিক্রম করতে ট্রেনটির 12 সেকেণ্ড সময় লাগবে।

উদাহরণ 3. 120 মিটার লম্বা একটি ট্রেন 330 মিটার লম্বা একটি সেতু অতিক্রম করবে। ট্রেনটির গতিবেগ যদি ঘণ্টায় 60 কিমি হয় তবে সেতুটি অতিক্রম করতে কত সময় লাগবে?

নিচের ছবিতে ঘটনাটি দেখ—



উপরের চিত্রের উপরের অংশে ট্রেনের ইঞ্জিনটি যখন সেতুটির বাম প্রান্ত স্পর্শ করলো তখন সেতুটি অতিক্রম করার কাজ শুরু হলো। আবার চিত্রের নিচের অংশে ট্রেনটির শেষপ্রান্ত যখন সেতুটির দক্ষিণ প্রান্ত ছেড়ে যাচ্ছে তখন সেতুটি অতিক্রম করার কাজ শেষ হলো। ছবিতে দেখ, তা করতে ট্রেনটিকে সেতুর দৈর্ঘ্য ও ট্রেনটির নিজ দৈর্ঘ্যের যোগফলের

সমান দূরত্ব অতিক্রম করতে হয়েছে ; অর্থাৎ (330+120) মি বা 450 মি অতিক্রম করতে হয়েছে।

তাই বলা যায়, নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের কোন একটি গতিশীল বস্তুকে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের অপর একটি স্থির বস্তুকে অতিক্রম করতে হলে গতিশীল বস্তুকে তার নিজের দৈর্ঘ্য ও স্থির বস্তুটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টির সমান দূরত্ব অতিক্রম করতে হয়।

ঐকিক নিয়মে সমাধানটি দেখ :

60 কিমি বা 60000 মি দূরত্ব যেতে ট্রেনটির 1 ঘণ্টা

বা (60×60) সেকেণ্ড সময় লাগে

1 মি দূরত্ব যেতে ট্রেনটির $\frac{60 \times 60}{60000}$ সেকেণ্ড সময় লাগবে

450 মি দূরত্ব যেতে ট্রেনটির $\frac{60 \times 60 \times 450}{60000}$ সেকেণ্ড

$=27$ সেকেণ্ড সময় লাগবে

∴ সেতুটি অতিক্রম করতে ট্রেনটির 27 সেকেণ্ড সময় লাগবে।

প্রশ্নমালা 7

1. বিনী ট্যাক্সি চেপে ঘণ্টায় 48 কিমি বেগে 50 মিনিটে এক জায়গায় গেল। ফেরার সময় সাইকেলে ফিরতে তার 2 ঘণ্টা 40 মিনিট সময় লাগলো। স্থানটির দূরত্ব কত ছিল এবং সাইকেলের গতিবেগই বা কত ছিল ?

2. একটি মোটর সাইকেলের গতিবেগ একটি ট্রাকের গতিবেগের দেড়গুণ। যে দূরত্ব যেতে ট্রাকটির 1 ঘণ্টা 20 মিনিট সময় লাগে, সেই দূরত্ব মোটর সাইকেলে যেতে কত সময় লাগবে ?

3. 100 কিমি দূরবর্তী একটি জায়গায় সন্ধ্যা 6 টা 30 মিনিটে পেঁছবেন মনে করে হোসেন সাহেব বেলা 12 টা 40 মিনিটে রওনা হলেন। বেলা 4 টার সময় দেখলেন যে তিনি মাত্র অর্ধেক পথ এসেছেন। সময়মতো গন্তব্যস্থলে পেঁছতে তার গতিবেগ ঘণ্টায় কতটুকু বাড়াতে হবে ?

4. 12 কিমি দূরত্বের একটি প্রতিযোগিতায় একটি টাঙ্গা একটি বলদের গাড়িকে 12 মিনিটে পরাজিত করে। টাঙ্গাটির গতিবেগ যদি ঘণ্টায় 15 কিমি হয়, তবে বলদের গাড়ির গতিবেগ কত ছিল ?

5. তুমি লেবেল ক্রসিং-এ দাঁড়িয়ে দেখলে 280 মিটার লম্বা একটি ট্রেন তোমাকে 14 সেকেন্ডে অতিক্রম করেছে। ট্রেনটির গতিবেগ কত ছিল ?

6. একটি সেতুর দৈর্ঘ্য 250 মিটার। 5 মিটার লম্বা একটি মোষের গাড়ি যদি ঘণ্টায় 4·5 কিমি যেতে পারে, তবে সেতুটি অতিক্রম করতে গাড়িটির কত সময় লাগবে ?

7. ঘণ্টায় 48 কিমি বেগে একটি ট্রেন 15 সেকেন্ডে একটি টেলিগ্রাফ পোস্ট অতিক্রম করে। 240 মিটার দীর্ঘ সেতু অতিক্রম করতে ট্রেনটির কত সময় লাগবে ?

8. একস্‌প্রেস ট্রেনের একজন যাত্রী দেখলেন একটি প্ল্যাটফর্ম অতিক্রম করতে 15 সেকেন্ড সময় লেগেছে। ট্রেনটির গতিবেগ যদি ঘণ্টায় 60 কিমি হয়, তবে প্ল্যাটফর্মটির দৈর্ঘ্য কত ছিল ?

9. একটি ট্রেন 10 সেকেন্ডে 150 মিটার লম্বা প্ল্যাটফর্মে দাঁড়ানো একজন লোককে অতিক্রম করে এবং গোটা প্ল্যাটফর্মটি অতিক্রম করে 22 সেকেন্ডে। ট্রেনটির দৈর্ঘ্য ও গতিবেগ নির্ণয় কর।

10. 350 মিটার দীর্ঘ একটি সেতু অতিক্রম করতে ঘণ্টায় 60 কিমি গতিবেগে ধাবমান একটি ট্রেনের 36 সেকেন্ড সময় লাগে। ঐ ট্রেন থেকে 100 মিটার কম দৈর্ঘ্যের অপর একটি ট্রেন ঘণ্টায় 45 কিমি গতিবেগে সেতুটিকে অতিক্রম করে। ট্রেন দুটির দৈর্ঘ্য কত ? দ্বিতীয় ট্রেনটি কত সেকেন্ডে সেতুটিকে অতিক্রম করেছিল ?

11. প্ল্যাটফর্মে একটি ট্রেন দাঁড়িয়ে আছে দেখে এক ব্যক্তি 225 মিটার দূর থেকে ট্রেনটি ধরার জন্য ছুটতে শুরু করেন। তাঁর গতিবেগ যদি ঘণ্টায় 6 কিমি হয়, তবে ট্রেনটি অন্ততঃ আরো কত সময় দাঁড়িয়ে থাকলে তিনি ট্রেনটি ধরতে পারবেন ?

12. 250 মিটার দীর্ঘ একটি সেতু অতিক্রম করতে 150 মিটার দীর্ঘ একটি ট্রেনের 30 সেকেন্ড সময় লাগে। 130 মিটার দীর্ঘ একটি প্ল্যাটফর্ম অতিক্রম করতে ট্রেনটির কত সময় লাগবে ?

13. ঘণ্টায় 30 কিমি বেগের একটি বাস যখন বাস স্ট্যান্ড থেকে 500 মিটার দূরে, তখন স্ট্যান্ড থেকে 250 মিটার দূরে অবস্থিত এক ব্যক্তি বাসটি ধরবার জন্য ছুটতে শুরু করলেন। বাসটি স্ট্যান্ডে 40 সেকেন্ড দাঁড়িয়েছিল বলে তিনি এসে কোন মতে বাসটি ধরতে পারলেন। ঐ ব্যক্তির গতিবেগ কত ছিল ?

14. একটি ট্রেন 8 সেকেণ্ডে একটি টেলিগ্রাফ পোস্ট এবং 20 সেকেণ্ডে 264 মিটার দীর্ঘ একটি সেতু অতিক্রম করে। ট্রেনটির দৈর্ঘ্য ও গতিবেগ কত নির্ণয় কর।

15. একখানি ট্রেন 210 মিটার দীর্ঘ এবং 122 মিটার দীর্ঘ দুটি সেতু যথাক্রমে 25 সেকেণ্ড ও 17 সেকেণ্ডে অতিক্রম করে। ট্রেনটির দৈর্ঘ্য ও গতিবেগ নির্ণয় কর।

16. একটি ছোট্ট নৌকার গংগাবক্ষে হুগলী চুঁচুড়া পৌরসভার গা ঘেঁষে পৌরসভার একপ্রান্ত থেকে অপর প্রান্ত পর্যন্ত যেতে $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা সময় লাগে। নৌকার গতিবেগ যদি ঘণ্টায় 5 কিমি হয়, তবে নদী বরাবর হুগলী চুঁচুড়া পৌরসভা কতটা লম্বা? পথে ব্যাণ্ডেল চার্চ থেকে ইমামবারা পর্যন্ত 2$\frac{1}{2}$ কিমি দীর্ঘ পথ কত সময়ে গিয়েছে?

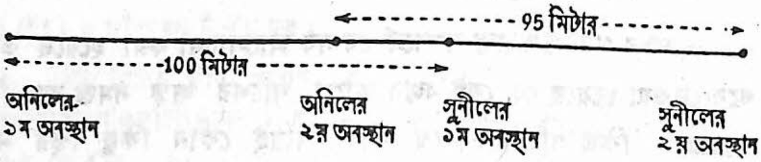
আপেক্ষিক গতিবেগ :

এতক্ষণ গতিশীল বস্তু সম্পর্কে যে সব আলোচনা করা হয়েছে তাতে ধরে নেওয়া হয়েছে যে, সেই বস্তুর আশে পাশের অন্য সমস্ত বস্তু স্থির রয়েছে। কিন্তু গতিশীল বিশ্বে কোন সময়েই কোন কিছু স্থির নয়। তোমরা জান, আমাদের এই পৃথিবী তার সমস্ত কিছু নিয়ে প্রতিনিয়ত তার অক্ষের ওপর ঘুরছে। আবার একই সঙ্গে তার নিজস্ব কক্ষপথে সূর্যের চারপাশে আবর্তন করছে। সুতরাং পৃথিবীর সঙ্গে সঙ্গে প্রকৃতি ও জীব জগতের আমরা সবাই নিয়ত গতিশীল অবস্থায় রয়েছি। অবশ্য নানা কারণে আমরা এই গতি অনুভব করি না বা তার ফল দেখতে পাই না। বড় হয়ে যখন উচ্চতর বিজ্ঞান পড়বে তখন বিস্তারিতভাবে এর কারণ জানতে পারবে।

যাই হোক, বাস্তব জীবনে আমরা একই সঙ্গে একাধিক গতিশীল বস্তুর গতির ক্রিয়া প্রতিক্রিয়া দেখতে পাই, তাদের পরিণাম ও পরিমাণ নির্ণয়ে নানা প্রশ্ন দেখা দেয়। নিচে সে বিষয়েই সংক্ষিপ্ত আলোচনা করা হল।

দৌড় প্রতিযোগিতায় তোমরা লক্ষ্য করেছ, একই স্থান থেকে যাত্রা

করলেও প্রতিযোগীদের মধ্যে পরস্পরের ব্যবধান পরিবর্তিত হতে থাকে। দু'জন লোক একই সরল পথে বিভিন্ন গতিবেগে একই দিকে বা বিপরীত দিকে হাঁটলে তাদের মধ্যে ব্যবধানও পরিবর্তিত হয়। এই ব্যবধান কখনও বাড়ে, আবার কখনও বা কমে। ধরে নেওয়া যাক, একই দিকে অনিল মিনিটে 40 মিটার বেগে ও সুনীল মিনিটে 35 মিটার বেগে হাঁটছে এবং সুনীল অনিলের চেয়ে 100 মিটার এগিয়ে আছে।(I) প্রথম অবস্থায় দেখা গেল, সুনীল অনিলের চেয়ে 100 মিটার এগিয়ে আছে। এবার অনিল ও সুনীল উভয়ে একই দিকে হাঁটতে শুরু করলো। 1 মিনিট পরে দেখা যাবে, অনিল 40 মিটার ও সুনীল 35 মিটার হেঁটেছে। তাদের মধ্যে ব্যবধান হবে 95 মিটার। সুতরাং দেখা গেল, তাদের মধ্যে ব্যবধান (100—95) মিটার=5 মিটার কমে গেল।



একইভাবে দ্বিতীয় মিনিটে তাদের মধ্যে ব্যবধান আরও 5 মিটার কমে যাবে। অর্থাৎ 2 মিনিটে উভয়ের মধ্যে মোট ব্যবধান 10 মিটার কমে যাবে। এভাবে দেখা যাবে, উভয়ের ব্যবধান কমার হার হবে প্রতি মিনিটে 5 মিটার। সুতরাং 100 মিটার ব্যবধান কমতে লাগবে (100÷5) মিনিট=20 মিনিট ; অর্থাৎ 20 মিনিট পরে উভয়ে একত্র হবে। এরপর কিন্তু অনিল সুনীলের চেয়ে আগে এগিয়ে যাবে ও পরের মিনিটে অনিল ও সুনীলের ব্যবধান হবে 5 মিটার। তার পরের মিনিটে ঐ ব্যবধান দাঁড়াবে 10 মিটার। কাজেই দেখা যাচ্ছে উভয়ের সাক্ষাতের পরে ব্যবধান ক্রমশঃ বাড়বে এবং এই বৃদ্ধির হার প্রতি মিনিটে 5 মিটার। এখন বলতো একইভাবে হাঁটতে থাকলে (i) প্রথম অবস্থানের কত সময় পরে অনিল সুনীলের থেকে 50 মিটার পিছিয়ে থাকবে? (ii) প্রথম অবস্থানের কত সময় পরে অনিল সুনীলের চেয়ে 50 মিটার এগিয়ে

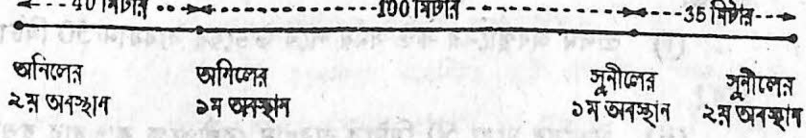
থাকবে ? (iii) অনিল ও সুনীলের মধ্যে 50 মিটার ব্যবধান বেশীপক্ষে কত বার হওয়া সম্ভব ? (iv) অনিল ও সুনীলের মধ্যে ব্যবধান 110 মিটার বেশীপক্ষে কত বার সম্ভব এবং তা কতক্ষণ পরে ?

(2) আবার সুনীলের গতিবেগ যদি অনিলের গতিবেগ অপেক্ষা বেশী হয়, সেক্ষেত্রে কিন্তু উভয়ের ব্যবধান কোন সময় কমবে না। ধরা যাক, অনিলের গতিবেগ একই আছে (অর্থাৎ মিনিটে 40 মিটার), কিন্তু সুনীলের গতিবে মিনিটে 50 মিটার। এক্ষেত্রে কিন্তু প্রতি মিনিটে উভয়ের ব্যবধান 10 মিটার করে বেড়ে যাবে। একইভাবে হাঁটতে থাকলে উভয়ের কখনও সাক্ষাৎ হবে না। এখন বলতো, (i) কত সময় পরে উভয়ের ব্যবধান 50 মিটার বেশী হবে ? (ii) ঐ সময়ে উভয়ের মধ্যে প্রকৃত ব্যবধান কত হবে ?

(3) উপরের দুটি ক্ষেত্রের প্রত্যেকটিতে ধরে নেওয়া হয়েছে, অনিল ও সুনীল একই দিকে হাঁটছে। কিন্তু তারা যদি বিপরীত দিকে হাঁটে তাহলে অবস্থাটা কেমন হবে, দেখা যাক। আগের মতই ধরে নেওয়া যাক, তাদের মধ্যে ব্যবধান 100 মিটার আছে এবং অনিল ও সুনীল যথাক্রমে মিনিটে 40 মিটার ও 35 মিটার বেগে হাঁটছে।

(*a*) যদি অনিল সুনীল যেদিকে আছে তার বিপরীত দিকে ও সুনীল অনিল যেদিকে আছে তার বিপরীত দিকে হাঁটে, তবে 1 মিনিট পরে তাদের মধ্যে ব্যবধান হবে

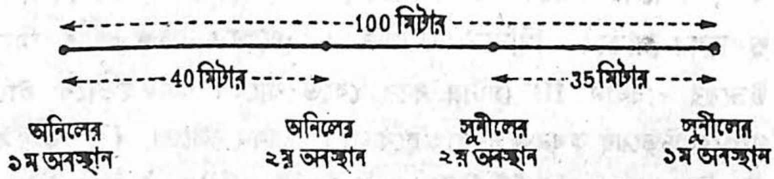
$$(40+100+35) \text{ মিটার}=175 \text{ মিটার।}$$



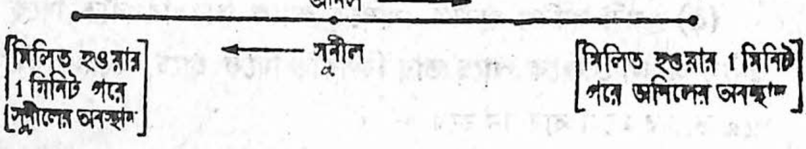
সুতরাং দেখা যাচ্ছে প্রতি মিনিটে তাদের মধ্যে ব্যবধান বেড়ে যাচ্ছে (175−100) মিটার=75 মিটার। লক্ষ্য কর, প্রতি মিনিটে এই বৃদ্ধির হার প্রত্যেকের প্রতি মিনিটে গতিবেগ সমূহের সমষ্টির সমান।

এই হিসাবে বলা যায়, 10 মিনিটে তাদের ব্যবধান বাড়বে (75 × 10) মিটার = 750 মিটার। মোট ব্যবধান সেক্ষেত্রে দাঁড়াবে (750 + 100) মিটার = 850 মিটার।

(*b*) আবার অনিল ও সুনীল যদি পরস্পরের দিকে হাঁটে সেক্ষেত্রেও তাদের গতি বিপরীতমুখী হবে।



এখানে 1 মিনিটে তাদের ব্যবধান কমছে (40 + 35) মিটার = 75 মিটার। 1 মিনিট পরে উভয়ের প্রকৃত ব্যবধান হবে (100 − 75) মিটার = 25 মিটার। 100 মিটার ব্যবধান কমতে সময় লাগবে (100 ÷ 75) মিনিট = $1\frac{1}{3}$ মিনিট, অর্থাৎ 1 মিনিট 20 সেকেণ্ড। সুতরাং দেখা গেল, 1 মিনিট 20 সেকেণ্ড পরে উভয়ে একত্র হবে। মিলিত হওয়ার পর কিন্তু তাদের ব্যবধান বেড়ে যাবে।



এই ব্যবধান বৃদ্ধির হার হবে মিনিটে 75 মিটার করে। এখন বলতো

(i) প্রথম অবস্থানের কত সময় পরে উভয়ের ব্যবধান 50 মিটার হবে?

(ii) উভয়ের মধ্যে 50 মিটার ব্যবধান বেশীপক্ষে কত বার হওয়া সম্ভব এবং কত সময় পরে?

(iii) প্রথম অবস্থানের কত সময় পরে উভয়ের ব্যবধান 1 কিলোমিটার হবে?

মনে কর, অনিল সুনীলের মধ্যে ব্যবধান ও তাদের গতিবেগ বিভিন্ন অবস্থায় পরিবর্তিত হচ্ছে। নিচের তালিকায় কতকগুলো অবস্থায় তাদের গতিবেগ ও পারস্পরিক প্রাথমিক ব্যবধান দেওয়া আছে। এখানে অনিল সুনীলের দিকে ও সুনীল একই দিকে হাঁটলে নিচের তালিকাটির শূন্যস্থান যথাযথভাবে পূরণ কর।

অবস্থা	মিনিটে অনিলের গতিবেগ (মিটারে)	মিনিটে সুনীলের গতিবেগ (মিটারে)	অনিল ও সুনীলের প্রাথমিক ব্যবধান (মিটারে)	1 মিনিট পর মোট ব্যবধান বৃদ্ধি অথবা হ্রাস (মিটারে)	10 মিনিট পর মোট ব্যবধান বৃদ্ধি অথবা হ্রাস (মিটারে)	20 মিনিট পর মোট ব্যবধান বৃদ্ধি অথবা হ্রাস (মিটারে)	আবার মিলিত হবে কি? হলে কত সময় পর (মিনিট)
১ম অবস্থা	30	25	20				
২য় অবস্থা	30	25	25				
৩য় অবস্থা	18	20	30				
৪র্থ অবস্থা	20	35	30				
৫ম অবস্থা	40	30	60				

নিম্নলিখিত তিনটি ক্ষেত্রের প্রত্যেকটির জন্য উপরের তালিকার অনুরূপ তালিকা প্রস্তুত কর। ঐ তিনটি তালিকার শূন্যস্থানগুলো যথাযথভাবে পূরণ কর।

(*a*) সুনীল অনিলের দিকে ও অনিল একই দিকে হাঁটছে,

(*b*) অনিল সুনীলের দিকে ও সুনীল অনিলের দিকে হাঁটছে,

(*c*) অনিল, সুনীলের বিপরীত দিকে ও সুনীল অনিলের বিপরীত দিকে হাঁটছে।

এখন নিম্নলিখিত সাধারণ মন্তব্যগুলো লক্ষ্য কর :

(1) একটি নির্দিষ্ট ব্যবধানে অবস্থিত দুটি গতিশীল বস্তু একই দিকে গেলে তাদের মধ্যে ব্যবধান বাড়তে বা কমতে পারে। প্রথম বস্তু দ্বিতীয় বস্তুর দিকে গেলে উভয়ের ব্যবধান প্রথমে কমবে যদি প্রথম বস্তুর গতিবেগ দ্বিতীয় বস্তুর গতিবেগ অপেক্ষা বেশী হয়। এক্ষেত্রে ব্যবধান কমতে কমতে একসময় উভয় বস্তু একত্র হবে। তারপর কিন্তু

পরস্পরের মধ্যে ব্যবধান বেড়ে যাবে। দ্বিতীয় বস্তু পিছিয়ে পড়বে ও প্রথম বস্তু এগিয়ে যাবে।

(2) প্রথম বস্তুর গতিবেগ দ্বিতীয় বস্তুর গতিবেগ অপেক্ষা কম হলে প্রথম থেকেই উভয়ের ব্যবধান বাড়বে।

উভয় ক্ষেত্রেই ব্যবধান বৃদ্ধি বা হ্রাসের হার উভয় বস্তুর গতিবেগের বিয়োগফলের সমান।

(*a*) দুটি গতিশীল বস্তু পরস্পর বিপরীত দিকে যেতে থাকলে তাদের ব্যবধান বেড়েই চলবে। এই ব্যবধান বৃদ্ধির হার উভয়ের গতিবেগের হারের সমষ্টির সমান।

(*b*) দুটি গতিশীল বস্তু পরস্পরের দিকে চলতে থাকলে তাদের ব্যবধান প্রথমে কমে যায়। কিছু সময় পরে তারা একস্থানে পৌঁছায়। তারপর তাদের ব্যবধান বাড়তে থাকে। এই ব্যবধান হ্রাস বা বৃদ্ধির হার উভয় বস্তুর গতিবেগের হারের যোগফল।

সাধারণভাবে বলা যায়,

(i) একই দিকে গেলে,

দুটি গতিশীল বস্তুর মধ্যে পারস্পরিক ব্যবধান বৃদ্ধি বা হ্রাসের হার =উভয় বস্তুর গতিবেগের হারের বিয়োগফল।

(ii) আবার বিপরীত দিকে গেলে,

দুটি গতিশীল বস্তুর মধ্যে পারস্পরিক ব্যবধান বৃদ্ধি বা হ্রাসের হার=উভয় বস্তুর গতিবেগের হারের যোগফল।

মনে কর, তোমার বন্ধু তোমার কাছ থেকে 50 মিটার দূরে স্থিরাবস্থায় আছে। তুমি সরল পথে তোমার বন্ধুর কাছে হেঁটে গেলে। যদি তুমি সমবেগে হাঁটো, তোমার প্রকৃত গতিবেগ যত তোমার বন্ধুও তোমার সেরূপ গতিবেগই অনুভব করবে।

এবার মনে কর, তোমার বন্ধু 50 মিটার এগিয়ে আছে।

(1) এখন দু'জনে যদি একই গতিবেগে একই দিকে হাঁটো, উভয়ের ব্যবধান একই থাকবে। তোমার মনে হবে তোমার বন্ধু স্থির আছে। তুমি যদি তোমার বন্ধুর চেয়ে বেশী বেগে হাঁটো, তবে ব্যবধান কমে

আসবে এবং ঐ ব্যবধান কমার হার দুজনের গতিবেগের হারের বিয়োগফলের সমান। তোমার বন্ধুর মনে হবে, ঐ হ্রাসপ্রাপ্ত গতিবেগে তুমি তার দিকে এগিয়ে যাচ্ছ। আবার তোমার মনে হবে, তোমার বন্ধু ঐ হ্রাসপ্রাপ্ত গতিবেগে তোমার দিক থেকে পিছিয়ে আসছে।

আবার তোমার গতিবেগ যদি তোমার বন্ধুর গতিবেগ অপেক্ষা কম হয়, তোমার মনে হবে, তোমার কাছ থেকে তোমার বন্ধু দূরে সরে যাচ্ছে। যে বেগে ব্যবধান বাড়ছে তার হার তোমার বন্ধুর ও তোমার গতিবেগের বিয়োগফলের সমান। তোমার বন্ধুর মনে হবে, তুমি তার কাছ থেকে ঐ হ্রাসপ্রাপ্ত গতিবেগে পিছনের দিকে সরে যাচ্ছ।

এইরূপ আপাত গতিবেগকে একজনের দৃষ্টিতে আর এক জনের আপেক্ষিক গতিবেগ বলা হয়। উপরের আলোচনা থেকে সাধারণভাবে বলা যায়, দুটি গতিশীল বস্তু একই দিকে গেলে একটির সাপেক্ষে অপরটির আপেক্ষিক গতিবেগ তাদের প্রকৃত গতিবেগের বিয়োগফলের সমান।

(2) আবার তুমি ও তোমার বন্ধু যদি প্রথম থেকে পরস্পর বিপরীত দিকে হাঁটতে, তাহলে প্রত্যেকের মনে হোত যে সে বেশী বেগে দূরে সরে যাচ্ছে। প্রকৃত পক্ষে প্রতি মিনিটে উভয়ের মধ্যে ব্যবধান বৃদ্ধি উভয়ের প্রতি মিনিটে গতিবেগ সমূহের সমষ্টির সমান হবে। এক্ষেত্রেও এই আপাত গতিবেগকে একজনের দৃষ্টিতে আর এক জনের আপেক্ষিক গতিবেগ বলা হয়। সাধারণভাবে বলা যায়, দুটি গতিশীল বস্তুর পরস্পর বিপরীত দিকে সরে গেলে একজনের দৃষ্টিতে আর একজনের আপেক্ষিক গতিবেগ উভয়ের গতিবেগের সমষ্টির সমান হবে।

লক্ষ্য কর, তোমার বন্ধু স্থির থাকলে তুমি যে সময়ে বন্ধুর কাছে পৌঁছতে পার, তুমি ও তোমার বন্ধু উভয়ে একই দিকে হাঁটলে বন্ধুর কাছে পৌঁছতে তোমার বেশী সময় লাগবে। আবার তুমি ও তোমার বন্ধু একে অপরের দিকে হাঁটলে অনেক কম সময়ে তোমরা একত্র হতে পার।

একই দিকে উভয়ে হাঁটলে আপেক্ষিক গতিবেগ কম হয়; তাই

সময় বেশী লাগে। আবার পরস্পরের দিকে বিপরীত মুখে হাঁটলে আপেক্ষিক গতিবেগ বেশী হয়, তাই একত্র হতে কম সময় লাগে। সাধারণভাবে বলা যায়ঃ

(1) নির্দিষ্ট ব্যবধান অতিক্রম করার সময় $=\dfrac{\text{ব্যবধানের দূরত্ব}}{\text{আপেক্ষিক গতিবেগ}}$

(2) আপেক্ষিক গতিবেগ × নির্দিষ্ট ব্যবধান অতিক্রম করার সময় = ব্যবধানের দূরত্ব।

(3) আপেক্ষিক গতিবেগ $=\dfrac{\text{ব্যবধানের দূরত্ব}}{\text{ঐ ব্যবধান অতিক্রম করার সময়}}$

[মন্তব্য : তোমরা এই সূত্রগুলিও ব্যবহার করতে পার] মনে রাখা দরকার,

তুমি ও তোমার বন্ধু যদি পরস্পরের থেকে বিপরীত দিকে হাঁটো, তাহলে তোমাদের ব্যবধান আপেক্ষিক গতির হারে বেড়ে যাবে। তোমরা সেক্ষেত্রে কখনও একত্রে হতে পারবে না।

উদাহরণ 1. একই দিনে একই সময়ে দু'জন সাইকেল আরোহী যথাক্রমে হাওড়া ও আসানসোল থেকে পরস্পরের দিকে এগিয়ে চলেছে। তাদের গতিবেগ ঘণ্টায় যথাক্রমে 8 কিমি ও 10 কিমি। হাওড়া ও আসানসোলের দূরত্ব যদি 200 কিমি হয়, তবে 7 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে দূরত্ব কত থাকবে?

যেহেতু তারা বিপরীত দিক থেকে পরস্পরের প্রতি আসছে, তাই তাদের আপেক্ষিক গতিবেগ হবে ঘণ্টায় (8+10) কিমি=18 কিমি অর্থাৎ 1 ঘণ্টায় তারা পরস্পরের প্রতি 18 কিমি এগিয়ে আসে। সুতরাং 7 ঘণ্টায় তারা পরস্পরের প্রতি (18×7) কিমি=126 কিমি এগিয়ে আসবে।

∴ 7 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে দূরত্ব থাকবে (200−126) কিমি
=74 কিমি

উদাহরণ 2. একটি দৌড় প্রতিযোগিতায় মীনা ও আঞ্জুমানা মিনিটে যথাক্রমে 140 মিটার ও 145 মিটার বেগে ছুটেছিল। 580 মিটার দৌড় প্রতিযোগিতায় কে কত মিটারে বিজয়ী হয়েছিল?

যেহেতু আঞ্জুমানার গতিবেগ বেশী তাই প্রতিযোগিতায় সে বিজয়ী হয়েছিল।

সে 145 মিটার দূরত্ব যায় 1 মিনিটে

∴ 1 " " " $\frac{1}{145}$ "

∴ 580 " " " $\frac{1}{145} \times 580$ মিনিটে=4 মিনিটে

আবার যেহেতু তারা একই দিকে ছুটেছিল, তাই তাদের আপেক্ষিক গতিবেগ হবে (145—140) মিটার=5 মিটার। আর যেহেতু আঞ্জুমানার গতিবেগ বেশী তাই সে মিনিটে 5 মিটার করে এগিয়ে যাবে।

আঞ্জুমানা 1 মিনিটে এগিয়ে যায় 5 মিটার

" 4 " " " (5×4) মিটার=20 মিটার।

দৌড় প্রতিযোগিতায় আঞ্জুমানা 20 মিটারে বিজয়ী হবে।

প্রশ্নমালা 8

1. দুজন সাইকেল আরোহী একই সময়ে যথাক্রমে বর্ধমান ও হাওড়া থেকে পরস্পরের দিকে চলতে শুরু করে। বর্ধমান ও হাওড়ার দূরত্ব 90 কিমি। তাদের গতিবেগ যদি ঘণ্টায় যথাক্রমে 12 কিমি ও 10·5 কিমি হয়, তবে রওনা হওয়ার কতক্ষণ পরে তারা এক জায়গায় মিলিত হবে? হাওড়া থেকে সেই জায়গার দূরত্ব কত?

2. দুটি ট্রাক গুদাম থেকে মাল বোঝাই করে একই সময়ে একই গন্তব্যস্থলের দিকে রওনা হলো। তাদের গন্তব্যস্থলের দূরত্ব 72 কিমি। তাদের গতিবেগ ঘণ্টায় যথাক্রমে 45 কিমি ও 48 কিমি।

(i) 10 মিনিট পর কোন্‌টি এগিয়ে যাবে এবং কতটুকু?

(ii) একটি যখন গন্তব্যস্থলে পৌঁছে যাবে, তখন পেছনেরটি গন্তব্যস্থল থেকে কত দূরে থাকবে?

(iii) আগেরটি পরেরটির চেয়ে কতক্ষণ আগে গন্তব্যস্থলে পৌঁছবে?

3. দুটি জায়গা 'ক' ও 'খ'-এর দূরত্ব 480 কিমি। 'ক' থেকে কয়লা বোঝাই একটি লরি ঘণ্টায় 45 কিমি বেগে 'খ'-এর দিকে রওনা হওয়ার 2 ঘণ্টা পর 'খ' থেকে গম বোঝাই একটি টেম্পো ঘণ্টায় 30 কিমি বেগে 'ক'-এর দিকে যাত্রা শুরু করে। টেম্পো যাত্রা করার কতক্ষণ পর এবং 'খ' থেকে কতদূরে তারা মিলিত হবে?

4. মুনিয়াদের গ্রাম থেকে রেল স্টেশন 20 কিমি দূরে। সকাল 10টায় মুনিয়ার বাবা কোলকাতা যাবেন বলে গরুর গাড়ি চেপে স্টেশনের দিকে রওনা হয়েছেন। এক ঘণ্টা পর চিঠিতে একটি খবর পেয়ে বাবাকে খবরটি দিতে মুনিয়া 11টা 30 মিনিটে সাইকেল চেপে রওনা হলো। গরুর গাড়ির ও সাইকেলের গতিবেগ যদি ঘণ্টায় যথাক্রমে 4·8 কিমি ও 12·8 কিমি হয়, তবে কটার সময় মুনিয়া তার বাবাকে খবরটি জানাতে পারবে ? বাড়ি থেকে সেই স্থানের দূরত্ব কত ?

5. দুটি বাস ঘণ্টায় 45 কিমি বেগে একই সময়ে কোলকাতা থেকে শিলিগুড়ি রওনা হলো। বারাসত গিয়ে একটি বাসের টায়ার ফেটে গেল। অপর বাসটি চলতে লাগলো। টায়ার পালটে আধঘণ্টা পর সেই বাসটি ঘণ্টায় 60 কিমি বেগে ছুটলে বারাসত থেকে কত দূরে আগের বাসটিকে ধরতে পারবে ?

6. 200 মিটার ও 240 মিটার লম্বা দুটি ট্রেন ঘণ্টায় যথাক্রমে 42·5 কিমি ও 36·7 কিমি গতিবেগে পরস্পরের দিকে এগিয়ে আসছে। মিলিত হওয়ার কতক্ষণ পর তারা পরস্পরকে অতিক্রম করবে ?

7. 250 মিটার লম্বা একটি মালগাড়ি ঘণ্টায় 33 কিমি বেগে এগিয়ে চলেছে। পিছন থেকে 200 মিটার লম্বা একটি মেল ট্রেন ঘণ্টায় 60 কিমি বেগে এসে মালগাড়িটিকে ধরার পর কত সময়ে সেটিকে অতিক্রম করে যাবে ?

8. নদীপথে দক্ষিণেশ্বর থেকে ডায়মণ্ডহারবারের দূরত্ব 75 কিমি। ঘণ্টায় 24 কিমি বেগে একটি মোটর বোট বেলা 12 টায় দক্ষিণেশ্বর থেকে ডায়মণ্ডহারবারের দিকে রওনা হল। 2·5 মিনিট পর অন্য একটি মোটর বোট ঘণ্টায় 27 কিমি বেগে তার পিছনে রওনা হয়ে কতক্ষণ পর প্রথম বোটটিকে ধরে ফেলবে ?

9. ক ও খ-এর দূরত্ব 60 কিমি। এক ব্যক্তি বাই-সাইকেলে ক থেকে রওনা হওয়ার 3 ঘণ্টা পর তার বন্ধু মোটর সাইকেলে ঐ একই স্থান থেকে রওনা হয়। তাদের গতিবেগ যদি ঘণ্টায় যথাক্রমে 15 কিমি ও 60 কিমি হয়, তবে তারা দুজনে কোথায় মিলবে ?

10. একটি লেকে 800 মিটার নৌকা বাইচ প্রতিযোগিতায় গঙ্গা ও যমুনা নামে দুটি নৌকা অংশ গ্রহণ করে। যমুনা নৌকাটি সেকেণ্ডে 5 মিটার বেগে চলে 16 মিটারে গঙ্গাকে পরাজিত করে। গঙ্গার গতিবেগ কত ছিল ?

11. তোমরা তিন ভাই ঘণ্টায় 3 কিমি বেগে হেঁটে স্টেশনের দিকে রওনা হলে। তার 15 মিনিট পর তোমাদের বাবা রিক্সা করে রওনা হয়ে 5 মিনিটে তোমাদের সঙ্গে একই সময়ে স্টেশনে পেঁাছলেন। তোমাদের বাড়ি থেকে স্টেশনের দূরত্ব কত এবং রিক্সার গতিবেগ কত ছিল ?

12. দৌড়ের একটি বৃত্তাকার পথের পরিধি 1500 মিটার। ক ও খ এক সঙ্গে একই জায়গা থেকে দৌড় শুরু করে। ক যখন পথটি 6 বার প্রদক্ষিণ করে, খ তখন একপাক পিছনে পড়ে যায়। খ-এর গতিবেগ সেকেণ্ডে 5 মিটার হলে ক-এর গতিবেগ কত ?

13. দুটি সমান্তরাল রেল লাইনে একটি ইলেকট্রিক ট্রেন ও একটি ডিজেল ট্রেন দাঁড়িয়েছিল। তাদের গতিবেগ ঘণ্টায় যথাক্রমে 72 কিমি ও 60 কিমি। একই সময়ে তারা যাত্রা শুরু করে। পথে বিদ্যুৎ না থাকায় ইলেকট্রিক ট্রেনটি কিছুক্ষণ দাঁড়িয়েছিল। কিন্তু 2 ঘণ্টা 48 মিনিট পর তারা একই সময়ে পরের স্টেশনে পেঁাছায়। ইলেকট্রিক ট্রেনটি কতক্ষণ দাঁড়িয়েছিল ?

14. একটি 12 কিমি সাইকেল দৌড় প্রতিযোগিতায় অভ্র কাজলকে 5 সেকেণ্ডে পরাজিত করে। কাজলের গতিবেগ ঘণ্টায় 18 কিমি হলে, অভ্রের গতিবেগ কত ?

15. 1650 মিটার দীর্ঘ একটি বৃত্তাকার পথের এক জায়গা থেকে মদন ও মোজাম্মেল যথাক্রমে সেকেণ্ডে 5 মিটার ও 6 মিটার গতিবেগে বিপরীত দিকে রওনা হয়ে বারবার ঘুরতে থাকে। কতক্ষণ পরে তারা প্রথমবার এক জায়গায় মিলিত হবে। দ্বিতীয়বারে তারা যে জায়গায় মিলিত হবে সেই জায়গাটি তাদের যাত্রা শুরু করার জায়গা থেকে কত দূরে হবে ?

16. একটি দৌড় প্রতিযোগিতায় বলা আছে 475 মিটার দূরে অবস্থিত একটি লক্ষ্যবস্তু ছুঁয়ে নিজের জায়গায় ফিরে আসতে হবে। ক ও খ একসঙ্গে দৌড় শুরু করে। তাদের গতিবেগ ঘণ্টায় যথাক্রমে 15 কিমি ও 13·5 কিমি। ক লক্ষ্যবস্তু ছুঁয়ে ফিরে আসার সময় কোথায় এবং কখন খ-এর সঙ্গে তার দেখা হবে ?

17. বাস ডিপো থেকে 15 মিনিট পর পর ঘণ্টায় 16 কিমি বেগে বাস ছাড়ে। উল্টোদিক থেকে হেঁটে আসা এক ব্যক্তি 12 মিনিট পর পর এক একটি বাস অতিক্রম করেন। ঐ ব্যক্তির গতিবেগ কত ?

18. কোন স্থানে 21 মিনিট পর পর দুটি কামান দাগা হয়েছে। এক ব্যক্তি সেই দিকে আসার সময় 20 মিনিট 15 সেকেণ্ড অন্তর কামানের শব্দ শুনতে

পেলেন। শব্দের গতিবেগ যদি সেকেন্ডে 360 মিটার হয়, তবে লোকটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত কিলোমিটার ?

'19. রেল লাইনের পাশে দাঁড়ানো এক ব্যক্তি দেখলেন যে, সমান দৈর্ঘ্যের দু'খানি ট্রেন বিপরীত দিক থেকে এসে তাঁকে যথাক্রমে 18 সেকেন্ড ও 12 সেকেন্ডে অতিক্রম করেছে। ট্রেন দু'টি পরস্পরকে কত সময়ে অতিক্রম করবে ?

নদীর স্রোতে গতিশীল বস্তুর চলন :

স্রোতস্বিনী নদীতে যখন নৌকা চলে তখন গতিশীল বস্তু থাকে দুটি—(1) দাঁড়বাহী নৌকা (2) নদীর স্রোত। কিন্তু দুটি ট্রেনের চলনের সঙ্গে নৌকার চলনের পার্থক্য আছে। ট্রেন দুটি চলে স্বতন্ত্রভাবে নিজস্ব গতিবেগে, যার ফলে একের কাছে অপরের আপেক্ষিক গতি সহজেই ধরা পড়ে। কিন্তু এখানে দুটি আলাদা গতিবেগ একই বস্তুর উপর একই সঙ্গে কাজ করে। সুতরাং আপেক্ষিক গতির সূত্র দ্বারা এই ধরনের সমস্যার সমাধান করা যাবে না ; এরূপ সমস্যার সমাধান করতে হবে সম্মিলিত কার্যকরী গতির সূত্র দ্বারা।

এখানে বিচার্য বিষয়গুলো হলো :

(1) নৌকার প্রকৃত গতিবেগ ; অর্থাৎ স্থির জলে একটি নৌকা দাঁড়ের টানে একক সময়ে যে দূরত্ব যায়।

(2) নদীর স্রোতের গতিবেগ ; অর্থাৎ জোয়ার ভাটার সময় বা স্বাভাবিক নিয়মে নদীর জল ভাটির দিকে বয়ে চলার সময় একক সময়ে যে দূরত্ব যায়।

(3) সম্মিলিত কার্যকরী গতিবেগ ; অর্থাৎ নৌকার গতিবেগ ও নদীর স্রোতের গতিবেগ একই সঙ্গে কাজ করায় নৌকা একক সময়ে যত দূরত্ব যায়। নদীতে নৌকা চলার সময় নদীর স্রোতের গতির দিক ও নৌকার গতির দিক একমুখী অথবা বিপরীতমুখী হলে সাধারণত দু'রকমের ঘটনা ঘটে :

(*i*) নৌকা যখন স্রোতের অনুকূলে যায় তখন স্বাভাবিকভাবেই নদীর স্রোতের বেগ কার্যকরী বেগকে বাড়িয়ে দেয়।

$\therefore$ সম্মিলিত কার্যকরী গতিবেগ = নৌকার প্রকৃত গতিবেগ + নদীর স্রোতের বেগ।

(*ii*) নৌকা যখন স্রোতের প্রতিকূলে যায় তখন স্বাভাবিকভাবেই নৌকাকে স্রোতের গতিবেগের বিরুদ্ধে এগিয়ে যেতে হয়, অর্থাৎ নদীর স্রোতের বেগ কার্যকরী বেগকে কমিয়ে দেয়।

$\therefore$ সম্মিলিত কার্যকরী গতিবেগ = নৌকার প্রকৃত গতিবেগ — নদীর স্রোতের বেগ।

বলতো, নৌকার প্রকৃত গতিবেগ যদি নদীর স্রোতের গতিবেগের চেয়ে কম হয় তবে দ্বিতীয় ক্ষেত্রে কি ঘটনা ঘটবে ?

উদাহরণ 1. স্থির জলে দাঁড়বাহী একটি নৌকার প্রকৃত গতিবেগ ঘণ্টায় 7 কিমি আর নদীর স্রোতের গতিবেগ ঘণ্টায় 3 কিমি (1) স্রোতের অনুকূলে 20 কিমি দূরত্ব যেতে নৌকাটির কত সময় লাগবে ? (2) আবার স্রোতের প্রতিকূলে সেই দূরত্ব ফিরে আসতে কত সময় লাগবে ?

(1) তোমরা জান, নৌকটি যখন স্রোতের অনুকূলে থাকে তখন সম্মিলিত কার্যকরী গতিবেগ হবে ঘণ্টায় $(7+3)$ কিমি

সুতরাং স্রোতের অনুকূলে 20 কিমি দূরত্ব যেতে সময় লাগবে $\frac{20}{10}$ ঘণ্টা $=2$ ঘণ্টা।

(2) তোমরা জান, নৌকাটি যখন স্রোতের প্রতিকূলে যাবে তখন সম্মিলিত কার্যকরী গতিবেগ হবে ঘণ্টায় $(7-3)$ কিমি $=4$ কিমি

সুতরাং স্রোতের প্রতিকূলে 20 কিমি দূরত্ব যেতে সময় লাগবে $\frac{20}{4}$ ঘণ্টা $=5$ ঘণ্টা।

প্রশ্নমালা 9

1. স্থির জলে দাঁড়বাহী একটি নৌকার গতিবেগ ঘণ্টায় 10 কিমি এবং নদীর স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 4 কিমি।

(*i*) স্রোতের অনুকূলে 35 কিমি যেতে নৌকাটির কত সময় লাগবে ?

(*ii*) স্রোতের প্রতিকূলে 30 কিমি যেতে নৌকাটির কত সময় লাগবে ?

2. একটি নদীর স্রোতের গতিবেগ ঘণ্টায় 3 কিমি এবং স্থির জলে একটি নৌকার প্রকৃত গতিবেগ ঘণ্টায় 9 কিমি। ঐ নদীতে ঐ নৌকাটি

(i) 3 ঘণ্টা 20 মিনিটে স্রোতের অনুকূলে কত দূরত্ব যাবে ?

(ii) স্রোতের প্রতিকূলে 8·5 ঘণ্টায় কত দূরত্ব যাবে ?

3. স্রোতের অনুকূলে একটি নৌকা 4 ঘণ্টায় 40 কিমি পথ যায়। যদি স্থির জলে ঐ নৌকার গতিবেগ ঘণ্টায় 8 কিমি হয়, তবে নদীর স্রোতের গতিবেগ কত ছিল ?

4. একটি নৌকার স্রোতের প্রতিকূলে 20 কিমি যেতে 5 ঘণ্টা সময় লেগেছে। নদীর স্রোতের গতিবেগ যদি ঘণ্টায় 3 কিমি হয়, তবে নৌকার প্রকৃত গতিবেগ কত ছিল ?

5. প্রকৃত গতিবেগ ঘণ্টায় 7 কিমি এরূপ একটি নৌকার নদীর স্রোতের অনুকূলে 33 কিমি পথ যেতে 3 ঘণ্টা সময় লেগেছে। ফিরে আসার সময় তার কত ঘণ্টা সময় লাগবে ?

6. নদীপথে ক ও খ-এর দূরত্ব 48 কিমি। যে নৌকার প্রকৃত গতিবেগ ঘণ্টায় 12 কিমি তা স্রোতের অনুকূলে ঐ দূরত্ব 3 ঘণ্টায় যেতে পারে। স্রোতের প্রতিকূলে নৌকাটি চললে 3 ঘণ্টায় কত দূরত্ব যাবে ?

7. স্থির জলে দাঁড় টেনে এক ব্যক্তি 1 ঘণ্টায় 10 কিমি পথ যেতে পারেন। কিন্তু নদীতে স্রোতের প্রতিকূলে ঐ দূরত্ব যেতে তাঁর 5 গুণ সময় লাগে। নদীর স্রোতের গতিবেগ কত ?

8. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 9 কিমি এবং স্রোতের প্রতিকূলে ঘণ্টায় 5 কিমি অতিক্রম করতে পারে। নৌকার প্রকৃত গতিবেগ ও স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

9. একটি নৌকা দাঁড়ের টানে স্থির জলে ঘণ্টায় 6 কিমি যেতে পারে। স্রোতের প্রতিকূলে 6 কিমি যেতে তার 3 গুণ সময় লাগে। স্রোতের অনুকূলে 50 কিমি যেতে তার কত সময় লাগবে ?

10. একটি নৌকা 3 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 36 কিমি গেল। ফিরে আসার সময় তার সময় লাগলো 6 ঘণ্টা। স্থির জলে ঐ দূরত্ব যেতে নৌকাটির কত সময় লাগবে ?

11. একজন সাঁতারু স্থির জলে ঘণ্টায় 5 কিমি সাঁতার কাটতে পারে। ভাটির সময় সে আহিরীটোলা ঘাট থেকে খিদিরপুর ঘাট এই 12 কিমি দূরত্ব

গঙ্গায় সাঁতার দিয়ে 1 ঘন্টা 12 মিনিটে অতিক্রম করে। ভাটির স্রোতের বেগ কত ছিল?

12. স্থির জলে দাঁড় টেনে একটি নৌকা ঘন্টায় 7 কিমি যেতে পারে। ঐ নৌকা জোয়ারের সময় ডায়মন্ডহারবার থেকে বিড়লাপুর পৌঁছায় 4 ঘন্টায়। কিন্তু ভাটির সময় ডায়মন্ডহারবার ফিরে যেতে তার 3 ঘন্টা 45 মিনিট সময় লাগে। ডায়মন্ডহারবার থেকে বিড়লাপুরের দূরত্ব যদি 48 কিমি হয়, তবে জোয়ার ও ভাটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

13. একটি মোটর বোট স্থির জলে ঘন্টায় 35 কিমি বেগে চলতে পারে। জোয়ারের সময় জোয়ার ঠেলে বোটটি ভাটির দিকে 50 কিমি পথ 1 ঘন্টা 40 মিনিটে গেল। বোটটি যদি উজানের দিকে যেতো তবে ঐ পথ যেতে তার কত সময় লাগতো?

14. ঘাটে বাঁধা একটি নৌকা জোয়ারের টানে নোঙর ছিঁড়ে 1 ঘন্টা 12 মিনিটে 6·30 কিমি পথ চলে যায়। পরে মাঝি এসে দাঁড় টেনে নৌকাটিকে 2 ঘন্টা 48 মিনিটে ঘাটে ফিরিয়ে নিয়ে যায়। দাঁড়ের টানে নৌকার গতিবেগ কত ছিল?

15. ক ও খ নৌকা দুটি স্থির জলে যথাক্রমে ঘন্টায় 10 কিমি ও 12 কিমি বেগে চলতে পারে। তারা যথাক্রমে চ ও ছ ঘাট থেকে ক স্রোতের অনুকূলে এবং খ স্রোতের প্রতিকূলে বেলা 10টায় যাত্রা শুরু করে। চ ও ছ-এর দূরত্ব 121 কিমি হলে তারা কখন এক জায়গায় মিলিত হবে?

16. স্রোতের অনুকূলে একটি নৌকা 10 ঘন্টায় যত দূরত্ব যায়, স্রোতের প্রতিকূলে তা যেতে তার 20 ঘন্টা সময় লাগে। স্থির জলে নৌকার গতিবেগ ঘন্টায় 9 কিমি হলে দূরত্বটি কত?

17. স্রোতের অনুকূলে এবং প্রতিকূলে একটি নৌকার গতিবেগ যথাক্রমে ঘন্টায় 7 কিমি ও 5 কিমি। যদি নৌকার প্রকৃত গতিবেগ 1 কিমি কম হতো এবং স্রোতের গতিবেগ 1 কিমি বেশী হতো, তবে স্রোতের প্রতিকূলে 15 কিমি যেতে কত বেশী বা কম সময় লাগতো? স্রোতের অনুকূলে গেলেই বা কি ফল হতো?

18. স্রোতের অনুকূলে ক ও খ নৌকা দুটির গতিবেগ যথাক্রমে ঘন্টায় 9 কিমি ও 8 কিমি। স্রোতের প্রতিকূলে ক-এর গতিবেগ ঘন্টায় 7 কিমি হলে স্থির জলে 112 কিমি পথ যেতে কোন্ নৌকার কত বেশী সময় লাগবে?

পঞ্চম অধ্যায়

সময়-কার্য

সময়-কার্যের সমস্যার সঙ্গে যুক্ত বিষয়গুলো হলো :

(1) সময়ের পরিমাণ (2) কাজের পরিমাণ (3) কার্য-সম্পাদনকারীর সংখ্যা।

প্রথমেই এদের পারস্পরিক সম্পর্কগুলো দেখা যাক।

(1) কাজের লোকের সংখ্যা অপরিবর্তিত রেখে কাজের পরিমাণ বাড়ালে বা কমালে কাজের সময়ের কিরূপ পরিবর্তন হবে ?

উদাহরণ 1. একজন কৃষক তাঁর একটি লাঙ্গল নিয়ে 5 দিনে 3 বিঘা জমি চাষ করতে পারেন। তাঁর জমির মোট পরিমাণ যদি 12 বিঘা হয়, তবে সব জমি চাষ করতে তাঁর কতদিন সময় লাগবে ?

সমস্যাটি হলো :	জমির পরিমাণ	দিনের সংখ্যা
	3	5
	12	?

ঐকিক নিয়মে : 3 বিঘা জমি চাষ করতে 5 দিন সময় লাগে

1 " " " " $\frac{5}{3}$ " " "

12 " " " " $(\frac{5}{3}\times 12)$ দিন $=20$ দিন সময় লাগবে।

সুতরাং 12 বিঘা জমি চাষ করতে 20 দিন সময় লাগবে।

তাহলে দেখতে পাচ্ছ, কাজের পরিমাণ ও সময়ের পরিমাণের মধ্যে সোজাসুজি সম্পর্ক, অর্থাৎ কাজের পরিমাণ বাড়লে বেশী সময় লাগবে এবং কাজের পরিমাণ কমলে কম সময় লাগবে। আরও লক্ষ্য কর এদের পরিবর্তন সমহারিক।

(2) কাজের সময় অপরিবর্তিত রেখে, কাজের লোকের সংখ্যা বাড়ালে বা কমালে কাজের পরিমাণের কিরূপ পরিবর্তন হবে ?

উদাহরণ 2. 9 জন শ্রমিক এক সপ্তাহে 6টি বাই-সাইকেল তৈরি করতে পারে। যে বাই-সাইকেল কারখানায় 72 জন শ্রমিক কাজ করে সেই কারখানায় এক সপ্তাহে কতগুলো সাইকেল তৈরি হবে—বাসন্তিকাকে জিজ্ঞাসা করতে সে বললো 50টি। বাসন্তিকা কি ঠিক বলেছে ?

সমস্যাটি হলো : শ্রমিক সংখ্যা	কাজের পরিমাণ অর্থাৎ তৈরি বাই-সাইকেলের সংখ্যা
9	6
72	?

ঐকিক নিয়মে : 9 জন শ্রমিক সপ্তাহে 6টি বাই-সাইকেল তৈরি করে

∴ 1 „ „ „ $\frac{6}{9}$টি „ „ করবে

72 „ „ „ $(\frac{6}{9}\times 72)$টি

$=48$টি সাইকেল তৈরি করবে।

∴ 72 জন শ্রমিক সপ্তাহে 48টি সাইকেল তৈরি করবে। স্মুতরাং বাসন্তিকা ঠিক উত্তর দেয়নি।

তাহলে দেখতে পাচ্ছ, কাজের লোকের সংখ্যা ও কাজের পরিমাণের মধ্যে সোজাসুজি সম্পর্ক, অর্থাৎ কাজের লোক বাড়লে কাজের পরিমাণ বাড়বে এবং কাজের লোক কমলে কাজের পরিমাণ কমবে। এক্ষেত্রেও লক্ষ্য কর এদের পরিবর্তন সমহারিক।

(3) কাজের পরিমাণ ঠিক রেখে, কাজের লোকের সংখ্যা বাড়ালে বা কমালে কাজের সময়ের কিরূপ পরিবর্তন হবে ?

উদাহরণ 3. হিসাব করে দেখা গেল 24 জন গ্রামবাসী যদি কাজে হাত লাগান, তবে গ্রামের সেচের খালটি সংস্কার করতে 12 দিন সময় লাগবে। কিন্তু কাজের সময় দেখা গেল 36 জন গ্রামবাসী কাজ করছেন। খালটি সংস্কার করতে কতদিন সময় লাগবে ?

সমস্যাটি হলো : কাজের লোক	সময় (দিনে)
24	12
36	?

ঐকিক নিয়মে : 24 জন কাজ করলে সময় লাগে 12 দিন

1 " " " " লাগবে (12×24) দিন

[কারণ তখন 24 জনের কাজ একজনকে করতে হবে। তাই সময় বেশী লাগবে।]

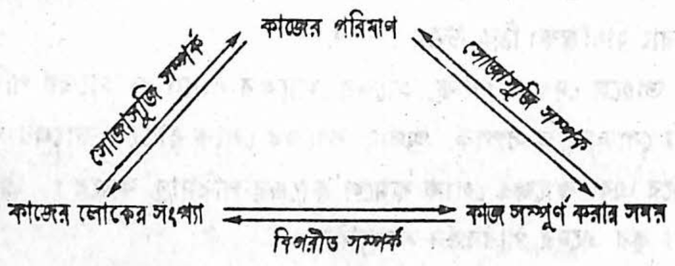
∴ 36 জন কাজ করলে সময় লাগবে $\frac{12\times24}{36}$ দিন = 8 দিন

[কারণ লোক বেশী হওয়ায় সময় কম লাগবে।]

∴ 36 জন গ্রামবাসী কাজ করলে 8 দিনেই কাজটি শেষ হবে।

তাহলে দেখতে পাচ্ছ, কাজের লোকের সংখ্যা ও কাজের সময়ের মধ্যে বিপরীত সম্পর্ক। অর্থাৎ কাজের লোক বাড়লে সময় কম লাগবে এবং কাজের লোক কমলে সময় বেশী লাগবে। এবার কিন্তু লক্ষ্যণীয় যে একটি যে হারে বাড়ছে, অন্যটি সে হারে কমছে।

উপরের সম্পর্কগুলো নিচে একটি ছকে দেওয়া হলো।



এবার নিচের উদাহরণটি দেখ :

উদাহরণ 4. 5 জন কৃষিমজুর 4 দিনে 8 বিঘা পাটের জমি নিড়াতে পারে। 70 বিঘা পাটের জমি নিড়াতে 25 জন কৃষিমজুরের কতদিন সময় লাগবে ?

সমস্যাটি হলো :

মজুরের সংখ্যা	জমির পরিমাণ (বিঘায়)	দিন সংখ্যা
5	8	4
25	70	?

উদাহরণটি থেকে নিশ্চয়ই দেখতে পাচ্ছ যে সমস্যাটি একটু আলাদা

ধরনের। পূর্বের সমস্যাগুলোতে দুটি বিষয়ের পরিবর্তন ঘটেছিল, কিন্তু এখানে তিনটি বিষয়েরই পরিবর্তন ঘটছে।

সমাধানটি দেখ :

5 জন কৃষিমজুর 8 বিঘা নিড়ানী করে 4 দিনে

∴ 1 " " 8 " " " 4×5 "

∴ 1 " " 1 " " " $\frac{4\times5}{8}$ "

25 " " 70 " " " $\frac{4\times5\times70}{8\times25}$ দিনে

$=7$ দিনে

25 জন মজুর 70 বিঘা পাটের জমি নিড়ানী করবে 7 দিনে।

প্রশ্নমালা 10

1. 25 জন লোক 115 মিটার রাস্তা সারাই করতে পারে। 55 জন লোক কাজ করলে দৈনিক কত মিটার রাস্তা সারাই হবে?

2. একজন কাঠ মিস্ত্রী 5 দিনে 2টি আলমারী তৈরি করতে পারেন। তিনি 10টি আলমারী তৈরি করার অর্ডার পেয়েছেন। তাকে কদিন কাজ করতে হবে?

3. 7 জন শ্রমিক 6 দিনে একটি মেসিন ফিট্ করতে পারেন। 14 জন শ্রমিক কাজ করলে মেসিনটি কত কম সময়ে ফিট্ হবে?

4. 35 জন শ্রমিক সপ্তাহে 10 টন লোহার যন্ত্রাংশ ঢালাই করে। সপ্তাহে 18 টন ঢালাই করতে আর কতজন শ্রমিক নিয়োগ করতে হবে?

5. একটি তাঁত কারখানায় 15টি তাঁত আছে। তার মধ্যে 3টি তাঁত বন্ধ থাকায় গত সপ্তাহে 168টি ধুতি-শাড়ি তৈরি হয়েছে। এ সপ্তাহে সবগুলি তাঁত চালু আছে। এ সপ্তাহে কতগুলি ধুতি-শাড়ি তৈরি হবে?

6. এক সমবায় খামারের 30 জন সভ্য 5 দিনে মাঠের অর্ধেক ধান কেটেছেন। কিন্তু অসুস্থ হয়ে পড়ার পরের দিন থেকে 5 জন সভ্য কাজ করতে পারছেন না। বাকি ধান কাটতে কতদিন সময় লাগবে?

7. 5 জন লোক প্রত্যহ 7 ঘণ্টা করে কাজ করে 8 দিনে একটি কাজ

করতে পারেন। প্রতিদিন 8 ঘণ্টা করে কাজ করলে কতজন লোকে সেই কাজটি 4 দিনে শেষ করতে পারবেন ?

[সংকেত : 7 ঘণ্টা হিসাবে 8 দিন $=(7\times 8)$ ঘণ্টা $=56$ ঘণ্টা]

8. 15 জন লোক দৈনিক 6 ঘণ্টা করে খেটে 8 দিনে একটি কাজ করেন। 10 জন লোক যদি সেই কাজটি 9 দিনে শেষ করতে চান তবে তাঁদের কত ঘণ্টা ধরে প্রত্যহ কাজ করতে হবে ?

9. হিসাবমত গাঁয়ের 60 জন লোক স্বেচ্ছাশ্রম দিলে 13 দিনে গাঁয়ে 725 মিটার লম্বা রাস্তাটি তৈরি হয়ে যাবে। কিন্তু কার্যক্ষেত্রে 52 জন লোক 9 দিন কাজ করার পর বর্ষা নেমে যাওয়ায় কাজ বন্ধ রাখতে হলো। কতটুকু রাস্তা তৈরি হতে বাকি রইল ?

10. 10 দিনের মধ্যে একটি জাহাজের মাল খালাস করার চুক্তি করে একজন ঠিকাদার 280 জন শ্রমিক নিযুক্ত করেন। 3 দিন কাজ হওয়ার পর দেখা যায় মাত্র $\frac{1}{4}$ অংশ কাজ হয়েছে। সময়মতো কাজটি শেষ করতে হলে তাকে আর কত জন শ্রমিক নিযুক্ত করতে হবে ?

11. 3 জন শ্রমিক প্রত্যহ 7 ঘণ্টা করে কাজ করে 2 দিনে 84 বর্গমিটার দেওয়াল চুনকাম করতে পারেন। 256 বর্গমিটার দেওয়াল 4 দিনে চুনকাম করাতে হলে দৈনিক 8 ঘণ্টা কাজ করবে এমন কত জন শ্রমিক লাগাতে হবে ?

12. একটি বেঞ্চ তৈরি করতে যে সময় লাগে, একটি আলমারী তৈরি করতে তার তিনগুণ সময় লাগে। যদি 6 জন কাঠমিস্ত্রী 12 দিনে 36টি বেঞ্চ ও 5টি আলমারী তৈরি করতে পারেন, তবে 61টি বেঞ্চ ও 8টি আলমারী তৈরি করতে 10 জন মিস্ত্রীর কত দিন সময় লাগবে ?

13. ফুড-ফর-ওয়ার্ক প্রোগ্রামমতো 50 মিটার লম্বা ও 35 মিটার চওড়া একটি পুকুর 250 জন লোক 18 দিনে কেটেছেন। 70 মিটার লম্বা ও 40 মিটার চওড়া একটি পুকুর কাটতে 300 জন লোকের কত দিন সময় লাগবে ?

14. একটি সমবায় কৃষি খামারের 2120 বিঘা জমি আছে। খামারের 4টি ট্রাক্টর প্রত্যহ 8 ঘণ্টা কাজ করে 4 দিনে 640 বিঘা জমি চাষ করতে পারে। চাষ শুরু হওয়ার 5 দিন পর একটি ট্রাক্টর নষ্ট হয়ে বসে যায়। ঐ খামারের সমস্ত জমি চাষ হতে মোট কত দিন সময় লাগবে ?

15. একটি লরি যে সময়ে যত মাল বইতে পারে একটি মোষের গাড়ি সেই সময়ে তার $\frac{1}{10}$ অংশ মাল বইতে পারে। যদি রোজ 8 ঘণ্টা কাজ করে 3টি লরি ও 5টি মোষের গাড়ি একটি গুদাম থেকে 490 টন মাল খালাস করতে

পারে, তবে 3136 টন মাল 7 দিনে খালাস করতে 12টি মোষের গাড়ির সঙ্গে ক'টি লরি লাগাতে হবে ?

16. একজন ঠিকাদার 15 দিনে 1200 মিটার রাস্তা পিচ ঢালাই-এর কাজ নিলেন। প্রত্যহ 8 ঘণ্টা করে 42 জন শ্রমিক 9 দিন কাজ করায় 700 মিটার রাস্তা তৈরি হল। এর পর 2 জন শ্রমিক অসুস্থ হয়ে পড়লো। এ অবস্থায় সময় মতো কাজটি শেষ করতে আরও কত জন শ্রমিক নিযুক্ত করতে হবে যদি শ্রমিকেরা প্রত্যহ 8 ঘণ্টা করেই কাজ করেন ?

17. 60 জন লোক 250 দিনে একটি বাড়ি তৈরি করতে পারে। তারা কাজ শুরু করার 200 দিন পর খারাপ আবহাওয়ার জন্য 10 দিন কাজ বন্ধ রাখতে হলো। সময় মতো কাজটি শেষ করতে হলে আর কত বেশী লোক লাগাতে হবে ? [স্কুঃ ফাঃ 1958]

18. 12 জন লোক প্রতিদিন 9 ঘণ্টা কাজ করে 30 দিনে একটি কাজ করতে পারে। কত জন লোক প্রত্যহ 5 ঘণ্টা কাজ করে এর 10 গুণ একটি কাজ 24 দিনে শেষ করতে পারবে ? [কঃ বি. 1948]

19. একজন ঠিকাদার 1920 মিটার দীর্ঘ একটি বাঁধ 120 দিনে শেষ করার চুক্তি করে 160 জন শ্রমিক নিযুক্ত করলেন। 24 দিন পর দেখা গেল মাত্র 240 মিটার বাঁধ তৈরি হয়েছে। নির্ধারিত সময়ের মধ্যে কাজটি শেষ করতে আর কতজন অতিরিক্ত লোক লাগাতে হবে ? [স্কুঃ ফাঃ 1966]

20. 8 জন পুরুষ বা 16 জন বালক একটি কাজ 53 দিনে করতে পারে। 19 জন পুরুষ ও 15 জন বালক সেই কাজের 3 গুণ একটি কাজ কতদিনে করতে পারবে ?

21. যদি 3 জন পুরুষ বা 4 জন বালক প্রত্যহ 8 ঘণ্টা কাজ করে 65 দিনে একটি কাজ করতে পারে, তবে 7 জন পুরুষ ও 8 জন বালক প্রত্যহ 10 ঘণ্টা কাজ করে কত দিনে ঐ কাজের $2\frac{1}{2}$ গুণ একটি কাজ করতে পারবে ?

22. গ্রামের একটি উন্নয়নমূলক কাজ শেষ করার জন্য 60 জন গ্রামবাসী প্রত্যহ 8 ঘণ্টা করে কাজ করতে শুরু করলেন। কিন্তু $\frac{3}{4}$ অংশ সময় চলে যাওয়ার পর দেখা গেল মাত্র $\frac{2}{3}$ অংশ কাজ হয়েছে। আরও কতজন গ্রামবাসীকে কাজটির সঙ্গে যুক্ত হতে হবে যাতে সকলে প্রত্যহ 10 ঘণ্টা করে কাজ করায় ঠিক সময়ে কাজটি শেষ হবে ?

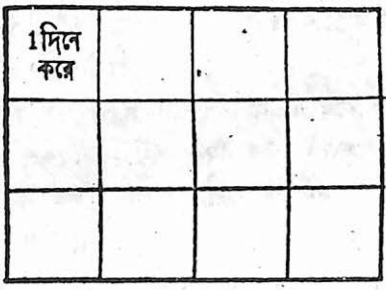
সময়-কার্য সম্বন্ধীয় জটিলতর সমস্যা :

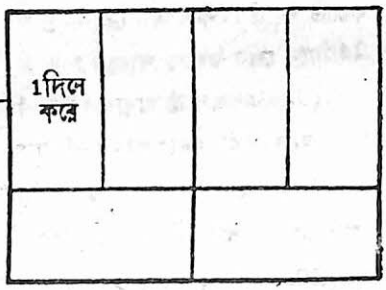
উদাহরণ 1. 'ক' একা একটি কাজ 12 দিনে করতে পারে ; আবার 'খ' একা সেই কাজটি 6 দিনে করতে পারে। ক ও খ একসঙ্গে মিলে কাজটি করলে কতদিনে তা শেষ হবে ?

মনে করো, কাজটি হলো একটি নির্দিষ্ট আয়তনের জমি নিড়ানো এবং গোটা কাজটিকে 1 ধরা হল।

একই আয়তনের জমি ক ও খ আলাদা আলাদা নিড়ালে কি হয় দেখ :

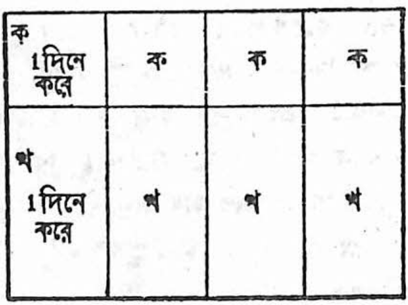
'ক' একা 12 দিনে সম্পূর্ণ কাজটি করে। 'খ' একা 6 দিনে সম্পূর্ণ কাজটি করে।





$\therefore$ ক 1 দিনে করে $\frac{1}{12}$ অংশ $\therefore$ খ 1 দিনে করে $\frac{1}{6}$ অংশ

এবার তারা একসঙ্গে কাজ করলে কাজটি কি ভাবে হয় দেখ :



ছবিতে দেখতে পাচ্ছ ক+খ 1 দিনে করে $\frac{1}{12}$ অংশ$+\frac{1}{6}$ অংশ$=\frac{1}{4}$ অংশ। আবার দেখতে পাচ্ছ, সেই মত তাদের দুজনকে 4 দিন করে

কাজ করতে হয়েছে। সুতরাং কাজটি শেষ হতে 4 দিন সময় লাগে। উপরোক্ত বিশ্লেষণে যা পাওয়া গেছে সেই মত ধাপে ধাপে অঙ্ক কষে দেখা যাক—

ক 12 দিনে করে সম্পূর্ণ কাজ $\quad \therefore$ ক 1 দিনে করে $\frac{1}{12}$ অংশ

খ 6 " " " $\quad \therefore$ খ 1 " " $\frac{1}{6}$ "

$\therefore$ ক + খ 1 দিনে করে $(\frac{1}{12}+\frac{1}{6})$ অংশ $= \frac{1}{4}$ অংশ

এখন সংখ্যাটি দাঁড়ালো :

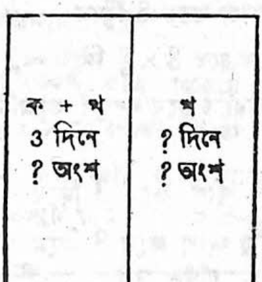
কাজ	দিন
$\frac{1}{4}$	1
1	?

ঐকিক নিয়মে : ক + খ কাজটির $\frac{1}{4}$ অংশ করে 1 দিনে

$\therefore$ ক + খ সম্পূর্ণ কাজটি করবে $(1 \div \frac{1}{4})$ দিনে $=$ 4 দিনে।

বিঃ দ্রঃ তোমরা জান, কাজের পরিমাণ ও সময়ের মধ্যে সোজাসুজি সম্পর্ক ; অর্থাৎ কাজের পরিমাণ বাড়লে সময় বাড়বে। তাই কাজের পরিমাণ যখন $\frac{1}{4}$ অংশ তখন সময় ছিল 1 দিন ; কাজের পরিমাণ বেড়ে যখন সম্পূর্ণ কাজ হল, তখন সময় বেড়ে হল 4 দিন। আবার মনে রেখ, কোন সংখ্যাকে 1এর চেয়ে ছোট ভগ্নাংশ দিয়ে ভাগ করলে তার মান বেড়ে যায়।

উদাহরণ 2. একটি কাজ ক ও খ একা একা যথাক্রমে 12 দিনে ও 8 দিনে করতে পারে। তারা একসঙ্গে কাজ করতে শুরু করে। কিন্তু 3 দিন পর ক অসুস্থ হয়ে পড়ে। এখন বাকি কাজটি খ একা শেষ করে। কাজটি শেষ হতে কতদিন সময় লাগে ?



দেখতে পাচ্ছ, কাজটি হয়েছে দুটি অংশে—

(1) প্রথম অংশটি ক+খ একসঙ্গে 3 দিন কাজ করে সম্পন্ন করে।

(2) দ্বিতীয় অংশটি খ একা কয়েকদিন কাজ করে শেষ করে।

আরও দেখতে পাচ্ছ প্রথম অংশে একটি মাত্র অজানা বিষয়; অথচ দ্বিতীয় অংশে দুটি অজানা বিষয়। সুতরাং প্রথম অংশটি নিয়ে অঙ্ক করার কাজ শুরু করতে হবে; কারণ ঐকিক নিয়মের সাহায্যে একটি মাত্র অজানা বিষয়ের মান নির্ণয় করা যায়।

এবার দেখ কিভাবে ধাপে ধাপে অঙ্কটি কষতে হবে :

(1) প্রথমে নির্ণয় করতে হবে ক+খ একসঙ্গে 1 দিনে কাজের কত অংশ করতে পারে।

ক 12 দিনে করে সম্পূর্ণ কাজ ∴ ক 1 দিনে করে $\frac{1}{12}$ অংশ

খ 8 দিনে করে সম্পূর্ণ কাজ ∴ খ 1 দিনে করে $\frac{1}{8}$ অংশ

∴ ক+খ 1 দিনে করে $(\frac{1}{12}+\frac{1}{8})$ অংশ $=\frac{5}{24}$ অংশ

(2) এবার নির্ণয় করতে হবে ক+খ 3 দিনে কত অংশ করে।

ক+খ 1 দিনে করে $\frac{5}{24}$ অংশ

∴ ক+খ 3 দিনে করে $\frac{5}{24}\times 3$ অংশ $=\frac{5}{8}$ অংশ

(3) এখন নির্ণয় করতে হবে কত অংশ বাকি রইলো যা 'খ'-কে একা করতে হবে।

বাকি অংশ $=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

(4) এবার নির্ণয় করতে হবে $\frac{3}{8}$ অংশ কাজ খ একা কতদিনে করবে।

খ একা সম্পূর্ণ কাজ করে 8 দিনে

∴ খ একা $\frac{3}{8}$ অংশ করবে $8\times\frac{3}{8}$ দিনে $=3$ দিনে।

(5) এবার নির্ণয় করতে হবে সম্পূর্ণ কাজটি করতে কতদিন সময় লেগেছে।

ক+খ প্রথম অংশ করে 3 দিনে

খ একা দ্বিতীয় অংশ করে 3 দিনে

সম্পূর্ণ কাজটি শেষ হতে সময় লাগে 6 দিন।

∴ কাজটি শেষ হতে 6 দিন সময় লাগবে।

উদাহরণ 3. একজন বালক যতটুকু কাজ করে একজন পুরুষ ঐ একই সময়ে তার দ্বিগুণ কাজ করতে পারে। যে কাজটি 10 জন পুরুষ 8 দিনে করতে পারে, সেই কাজটি 3 জন পুরুষ ও 4 জন বালক কত দিনে করতে পারবে ?

এখানে দেওয়া আছে 2 জন বালকের কাজ $=$ 1 জন পুরুষের কাজ

$\therefore$ 1 জন বালকের কাজ $=\frac{1}{2}$ জন পুরুষের কাজ

$\therefore$ 4 জন বালকের কাজ $=\frac{1}{2}\times 4$ জন পুরুষের কাজ

$=$ 2 জন পুরুষের কাজ

$\therefore$ (3 জন পুরুষ $+$ 4 জন বালক)-এর কাজ

$=(3+2)$ জন পুরুষের কাজ $=$ 5 জন পুরুষের কাজ

মূল সমস্যাটি হলো :

জন	দিন
10 পুরুষ	8
5 পুরুষ	?

10 জন পুরুষ একটি কাজ করে 8 দিনে

$\therefore$ 1 জন পুরুষ সেই কাজটি করবে (8×10) দিনে

$\therefore$ 5 জন পুরুষ সেই কাজটি করবে $\frac{8\times 10}{5}$ দিনে $=$ 16 দিনে

$\therefore$ 3 জন পুরুষ ও 4 জন বালক কাজটি করবে 16 দিনে।

প্রশ্নমালা 11

1. ক ও খ প্রত্যেকে একাকী একটি কাজ যথাক্রমে 10 ঘণ্টা ও 12 ঘণ্টায় করতে পারে। তারা একসঙ্গে কাজ করলে কতক্ষণে কাজটি শেষ করবে ?

2. ক, খ ও গ প্রত্যেকে একাকী একটি কাজ যথাক্রমে 6 দিন, 8 দিন ও 12 দিনে করতে পারে। তারা একসঙ্গে কাজ করলে কতদিনে কাজটি শেষ হবে ?

3. রহিম একা কাজ করলে 24 ঘণ্টায় একটি পাটের জমির আগাছা নিড়াতে পারে ; কিন্তু তার ছোট ভাই করিমের লাগে 30 ঘণ্টা ; তবে দু'ভাই একসঙ্গে কাজ করলে কত ঘণ্টায় কাজটি শেষ হবে ?

4. রাম, শ্যাম ও মধু আলাদা আলাদা কাজ করলে যথাক্রমে 18, 21 ও 24 ঘণ্টায় তাদের বাগানটি কুপিয়ে পাট করতে পারে। একসঙ্গে কাজ করলে কত ঘণ্টায় কাজটি হবে?

5. একা একা কাজ করলে মহিম ও নরেশ যথাক্রমে 8 ঘণ্টা ও 12 ঘণ্টায় একটি জমিতে ধান রুইতে পারে। সকালের দিকে মহিম একা 2 ঘণ্টা কাজ করে চলে গেলে, নরেশ এসে বাকী জমিটা রোয়ার কাজ শেষ করে। জমিটাতে ধান রুইতে কত সময় লেগেছিল?

6. ক, খ ও গ একা একা একটি কাজ যথাক্রমে 10, 12 ও 15 দিনে করতে পারে। তারা প্রত্যেকে পর পর 2 দিন করে একা একা কাজ করার পর কতটুকু কাজ বাকি থাকবে?

7. নবীন, সুরেশ ও অভয় একা একা যথাক্রমে 16, 20 ও 24 দিনে একটি কাজ শেষ করতে পারে। নবীন ও সুরেশ, সুরেশ ও অভয় এবং নবীন ও অভয় জোড়ায় জোড়ায় কাজ করলে কোন্ জোড়া কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে?

8. কোন একটি কাজ ক ও খ একত্রে 12 দিনে, খ ও গ একত্রে 15 দিনে এবং ক ও গ একত্রে 20 দিনে করতে পারে। তারা তিনজনে একত্রে কতদিনে কাজটি শেষ করবে? তারা একা একা কাজ করলে কে কতদিনে কাজটি শেষ করতে পারবে?

9. ক, খ ও গ প্রত্যেকে একা একা কোন একটি কাজ যথাক্রমে 10, 12 ও 15 দিনে করতে পারে। তারা একসঙ্গে কাজটি করতে শুরু করলো। 3 দিন পর খ অসুস্থ হয়ে চলে গেল। বাকি কাজটি ক ও গ কতদিনে শেষ করবে?

10. শ্রীপতি, সেলিম ও হারাণ মিস্ত্রী নিজ নিজ দলবল নিয়ে আলাদা আলাদাভাবে 30, 36 ও 45 দিনে একটি বাড়ি তৈরি করতে পারে। তারা একসঙ্গে কাজ শুরু করে। 3 দিন পর শ্রীপতি মিস্ত্রী তার দলবল নিয়ে চলে যায় এবং আরও 5 দিন পর হারাণ মিস্ত্রীও তার দলবল নিয়ে চলে যায়। বাকি কাজটি সেলিম মিস্ত্রী তার দলবল নিয়ে শেষ করে। কতদিনে বাড়িটি তৈরি হয়েছিল?

11. একটি কাজ ক ও খ একা একা যথাক্রমে 20 ও 30 দিনে করতে পারে। তারা একসঙ্গে 7 দিন কাজ করার পর দুজনেই চলে গেল। তখন গ এসে একা 10 দিনে বাকি কাজটি শেষ করলো। গ একা কত দিনে সব কাজটি করতে পারে?

12. 2 জন পুরুষ 3 জন স্ত্রীলোকের সমান কাজ করে। 4 জন পুরুষ ও 9 জন স্ত্রীলোক যে কাজটি 30 দিনে করতে পারে, সেই কাজটি 5 জন পুরুষ ও 15 জন স্ত্রীলোক কত দিনে করবে ?

13. 1 জন পুরুষ 1 জন বালকের দ্বিগুণ কাজ করতে পারে। যে কাজটি 6 জন পুরুষ ও 12 জন বালক 18 দিনে করতে পারে, সেই কাজটি কত জন পুরুষ 24 দিনে করতে পারবে ?

14. 2 জন পুরুষ ও 6 জন বালক যে কাজটি 6 দিনে করতে পারে, সেই কাজটি 5 জন পুরুষ ও 1 জন বালক 3 দিনে করতে পারে। 1 জন পুরুষ ও 1 জন বালক সেই কাজটি কত দিনে করতে পারবে ?

15. একটি কাজ 1 জন পুরুষ ও 1 জন স্ত্রীলোক $7\frac{1}{2}$ দিনে, 1 জন স্ত্রীলোক ও 1 জন বালক 12 দিনে এবং 1 জন পুরুষ ও 1 জন বালক 9 দিনে করতে পারে। 1 জন পুরুষ, 1 জন স্ত্রীলোক এবং 1 জন বালক একা একা কে কত দিনে কাজটি করতে পারে ?

16. মঞ্জু ও সন্ধ্যা 12 ঘণ্টায় একটি আলপনায় রং লাগাতে পারে। তারা 4 ঘণ্টা কাজ করার পর তাদের বন্ধু মণিকা এসে তাদের সঙ্গে হাত লাগায় এবং কাজটি আর 2 ঘণ্টা 40 মিনিটে শেষ হয়। মণিকা একা করলে কতক্ষণে কাজটি করতে পারতো ?

17. 1 জন পুরুষ, 1 জন স্ত্রীলোক ও 1 জন বালক একসঙ্গে একটি কাজ 5 দিনে করতে পারে। কিন্তু 5 জন স্ত্রীলোক ও 5 জন বালক 1 দিনে কাজটির $\frac{7}{12}$ অংশ করতে পারে। 1 জন পুরুষ একা কত দিনে কাজটি করতে পারবে ?

18. একটি কাজ ক ও খ একা একা যথাক্রমে 10 দিন ও 15 দিনে করতে পারে। প্রথমে ক একা 4 দিন ও পরে খ একা 5 দিন কাজ করে চলে গেলে, গ এসে একা বাকি কাজটি 8 দিনে শেষ করে। ক, খ ও গ একসঙ্গে কাজ করলে কতদিনে কাজটি শেষ করতে পারতো ?

19. 3 জন পুরুষ ও 5 জন স্ত্রীলোক একটি কাজ $2\frac{2}{5}$ দিনে করতে পারে এবং 6 জন পুরুষ ও 4 জন স্ত্রীলোক সেই কাজটি $1\frac{7}{8}$ দিনে করতে পারে। 9 জন পুরুষ ও 10 জন স্ত্রীলোক সেই কাজটি কত দিনে করতে পারবে ?

20. ক ও খ একত্রে একটি কাজ 6 দিনে করতে পারে এবং খ ও গ একত্রে সেই কাজটি 12 দিনে করতে পারে। গ একা যদি সেই কাজটি 36 দিনে করতে পারে, তবে তারা তিনজনে একত্রে কাজটি কত দিনে করতে পারবে ?

21. ক ও খ একত্রে একটি কাজ 15 দিনে করতে পারে। তারা প্রথমে 9 দিন একসঙ্গে কাজ করার পর বাকি কাজটি 'ক' একা 12 দিনে শেষ করে। আলাদা আলাদা কাজ করলে তারা কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারতো ?

[স্কুঃ ফাঃ ১৯৬০]

22. একটি কাজ ক ও খ 8 দিনে এবং খ ও গ 12 দিনে করতে পারে। কিন্তু তিনজনে একসঙ্গে করলে 6 দিনে কাজটি শেষ হয়। ক ও গ একত্রে কাজটি কতদিনে করতে পারবে ? [স্কুঃ ফাঃ ১৯৬২]

23. ক ও খ একটি কাজ একত্রে 3 ঘন্টা 44 মিনিটে করতে পারে। ক একাকী কাজটি 7 ঘন্টায় করতে পারে। ক কাজটি শুরু করার পর প্রতি 1 ঘন্টা অন্তর যদি তারা বদলা বদলি করে কাজ করে তবে কাজটি কতক্ষণে শেষ হবে ?

24. একটি কাজ ক 10 দিনে, খ 12 দিনে এবং গ 15 দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কাজ করতে শুরু করে। কিন্তু কাজটি শেষ হওয়ার 5 দিন আগে ক এবং 3 দিন আগে খ চলে গেল। কাজটি শেষ করতে মোট কত দিন সময় লাগে ?

[স্কুঃ ফাঃ ১৯৫৪]

তরল পদার্থের ধারক সম্বন্ধীয় সমস্যা :

সাধারণতঃ দেখা যায় চৌবাচ্চা বা ঐ জাতীয় কোন পাত্রে জল বা অন্য কোন প্রকার তরল পদার্থ ভর্তি করার জন্য অথবা তা থেকে তরল পদার্থ বের করার জন্য নল ব্যবহার করা হয়। নলের মাপের বিভিন্নতার জন্য তাতে কম বেশী সময় লাগে। আবার কোন পাত্রে ফুটো থাকলে তা দিয়ে তরল পদার্থ বেরিয়ে যায়। এ সম্বন্ধে যে সব সমস্যা দেখা দেয় সেগুলি হলো—

(1) ভর্তি করার নল দিয়ে কোন খালি পাত্র বা তার অংশ পূর্ণ করা।

(2) বের করার নল দিয়ে কোন পূর্ণ পাত্র বা তার অংশ খালি করা।

(3) একই প্রকার একাধিক নল বা দু প্রকারের একাধিক নল একসঙ্গে কাজ করলে তার ফল কি হয় তা নির্ণয় করা।

1নং ও 2নং সমস্যাগুলি সময়-কার্যের সাধারণসূত্র দ্বারা সমাধান করা যায়। ইতিমধ্যে তোমরা তা করতে শিখেছ।

3নং সমস্যা আবার দু'প্রকার হয়। নিচের উদাহরণগুলি দেখ।

(1) প্রথমতঃ একই প্রকারের একাধিক নল যখন একসঙ্গে কাজ করে তখন তার ফল হয় তাদের স্বতন্ত্র কাজের ফলের সমষ্টি। যেমন—

উদাহরণ 1. একটি চৌবাচ্চায় জল ভর্তি করার জন্য দুটি নল আছে। প্রথম ও দ্বিতীয় নল যথাক্রমে 6 ঘণ্টায় ও 12 ঘণ্টায় খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করতে পারে। দুটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে খালি চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হবে?

সম্পূর্ণ চৌবাচ্চাটির ধারণ ক্ষমতাকে 1 ধরা যায়।

এখন প্রথম নল 6 ঘণ্টায় পূর্ণ করে সম্পূর্ণ চৌবাচ্চা

∴ প্রথম নল 1 ঘণ্টায় পূর্ণ করে $\frac{1}{6}$ অংশ

দ্বিতীয় নল 12 ঘণ্টায় সম্পূর্ণ চৌবাচ্চা পূর্ণ করে

∴ দ্বিতীয় নল 1 ঘণ্টায় পূর্ণ করে $\frac{1}{12}$ অংশ

∴ নল দুটি 1 ঘণ্টায় পূর্ণ করে $(\frac{1}{6}+\frac{1}{12})$ অংশ $=\frac{1}{4}$ অংশ

এখন সমস্যাটি দাঁড়ালো :

	কাজ	সময় (ঘণ্টায়)
	$\frac{1}{4}$	1
	1	?

নল দুটি $\frac{1}{4}$ অংশ পূর্ণ করে 1 ঘণ্টায়

∴ নল দুটি সম্পূর্ণ চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করে $(1\div\frac{1}{4})$ ঘণ্টায় $=4$ ঘণ্টায়

∴ দুটি নল একসঙ্গে খোলা থাকলে চৌবাচ্চাটি 4 ঘণ্টায় পূর্ণ হবে।

উদাহরণ 2. একটি পেট্রোল ট্যাংক থেকে দুটি নল দিয়ে পেট্রোল বের করা যায়। নল দু'টি দিয়ে আলাদা আলাদা ভাবে ভর্তি ট্যাংকটিকে যথাক্রমে 4 ঘণ্টা ও 12 ঘণ্টায় খালি করা যায়। নল দুইটি একসংগে খুলে দিলে ভর্তি ট্যাংকটি কতক্ষণে খালি হবে?

প্রথম নল 4 ঘণ্টায় ভর্তি ট্যাংকটি খালি করে

∴ প্রথম নল 1 ঘণ্টায় $\frac{1}{4}$ অংশ খালি করে।

দ্বিতীয় নল 12 ঘণ্টায় ভর্তি ট্যাংকটি খালি করে

∴ দ্বিতীয় নল 1 ঘণ্টায় $\frac{1}{12}$ অংশ খালি করে।

∴ নল দুটি 1 ঘণ্টায় $(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})$ অংশ $=\frac{1}{3}$ অংশ খালি করে।

এখন সমস্যাটি দাঁড়ালো :

কাজ	সময় (ঘণ্টায়)
$\frac{1}{3}$	1
1	?

নল দুটি $\frac{1}{3}$ অংশ খালি করে 1 ঘণ্টায়

∴ নল দুটি ভর্তি ট্যাংকটি খালি করে $(1\div\frac{1}{3})$ ঘণ্টায় $=3$ ঘণ্টায়

∴ দুটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে ভর্তি ট্যাংকটি 3 ঘণ্টায় খালি হবে।

বিঃ দ্রঃ উপরের দুটি উদাহরণ 60 পৃষ্ঠায় 1নং উদাহরণের সঙ্গে মিলিয়ে দেখ।

(2) যখন দু প্রকারের একাধিক নল একসঙ্গে কাজ করে তখন ভর্তি করার নল দিয়ে পাত্রটি যেমন ভর্তি হতে থাকে, আবার একই সময় খালি হবার নল দিয়ে খালি হতে থাকে। এর ফলে দু'রকমের ঘটনা ঘটতে পারে।

(i) যখন একই সময়ে ভর্তি করার নল খালি করার নলের চেয়ে বেশী পরিমাণ ভর্তি করে তখন খালি বা আংশিক ভর্তি পাত্রটি ক্রমে পূর্ণ হওয়ার দিকে যায়। আর ভর্তি হওয়ার হার হয়,

ভর্তি করার হার—খালি করার হার।

উদাহরণ 3. একটি চৌবাচ্চায় দু'টি নল লাগানো আছে। প্রথমটি দিয়ে খালি চৌবাচ্চাটি 10 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং দ্বিতীয়টি দিয়ে ভর্তি চৌবাচ্চাটি 15 মিনিটে খালি হয়। চৌবাচ্চাটি যখন অর্ধ জলপূর্ণ আছে তখন দু'টি নল একসঙ্গে খুলে দিলে কত সময়ে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ বা খালি হবে?

প্রথম নলটি 10 মিনিটে ভর্তি করে সম্পূর্ণ চৌবাচ্চা

∴ প্রথম নলটি 1 মিনিটে পূর্ণ করে $\frac{1}{10}$ অংশ

দ্বিতীয় নলটি 15 মিনিটে খালি করে সম্পূর্ণ চৌবাচ্চা

∴ দ্বিতীয় নলটি 1 মিনিটে খালি করে $\frac{1}{15}$ অংশ

দেখা যাচ্ছে এখানে খালি হওয়ার হারের চেয়ে ভর্তি হওয়ার হার বেশী, কারণ $\frac{1}{15}$ অংশের চেয়ে $\frac{1}{10}$ অংশ বড়। তাই এখানে অর্ধপূর্ণ চৌবাচ্চা ক্রমে পূর্ণ হওয়ার দিকে যাবে।

আর যে হারে তা হবে তা হলো :

প্রথম নল 1 মিনিটে পূর্ণ করে $\frac{1}{10}$ অংশ

দ্বিতীয় নল 1 মিনিটে খালি করে $\frac{1}{15}$ অংশ

∴ নল দুটি একসঙ্গে খোলা থাকলে 1 মিনিটে পূর্ণ হবে $(\frac{1}{10}-\frac{1}{15})$ অংশ $=\frac{1}{30}$ অংশ।

বীজগণিতের ধারণার প্রয়োগ : তোমরা সপ্তম শ্রেণীতে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যা দেখেছ। সেই মত এখানে ভর্তি হওয়াকে যদি ধনাত্মক ধরা যায় তবে 'খালি হওয়া' ঋণাত্মক হবে। অর্থাৎ প্রথম নল 1 মিনিটে "$\frac{1}{10}$ অংশ পূর্ণ করে" ধনাত্মক হলে দ্বিতীয় নল 1 মিনিটে "$\frac{1}{15}$ অংশ খালি করে" ঋণাত্মক এবং তাকে ঋণাত্মক সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করলে তা হবে দ্বিতীয় নলটি 1 মিনিটে "$-\frac{1}{15}$ অংশ পূর্ণ করে"। তখন তাদের সম্মিলিত কাজের ফল দাঁড়াবে—

প্রথম নল 1 মিনিটে $\frac{1}{10}$ অংশ পূর্ণ করে

দ্বিতীয় নল 1 মিনিটে $-\frac{1}{15}$ অংশ পূর্ণ করে

∴ নল দুটি একসঙ্গে 1 মিনিটে $\{\frac{1}{10}+(-\frac{1}{15})\}$ অংশ

$=(\frac{1}{10}-\frac{1}{15})$ অংশ $=\frac{1}{30}$ অংশ পূর্ণ করে।

এখন সমস্যাটি থাকবে :

অংশ	সময় (মিনিটে)
$\frac{1}{30}$	1
$\frac{1}{1}$	?

নল দুটি $\frac{1}{30}$ অংশ পূর্ণ করে 1 মিনিটে

নল দুটি সম্পূর্ণ চৌবাচ্চা পূর্ণ করে $(1\div\frac{1}{30})$ মিনিটে $=30$ মিনিটে

নল দুটি $\frac{1}{2}$ অংশ পূর্ণ করে $(30 \times \frac{1}{2})$ মিনিটে $= 15$ মিনিটে।

∴ দুটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে অর্ধপূর্ণ চৌবাচ্চাটি 15 মিনিটে পূর্ণ হবে।

(ii) যখন একই সময়ে খালি করার নল ভর্তি করার নলের চেয়ে বেশী পরিমাণ খালি করে তখন পূর্ণ বা আংশিক পূর্ণ পাত্রটি খালি হওয়ার দিকে যায়। আর খালি হওয়ার হার হয়,

খালি হওয়ার হার − ভর্তি হওয়ার হার।

উদাহরণ 4. একটি চৌবাচ্চায় দু'টি নল আছে। প্রথম নলটি খালি চৌবাচ্চাকে 18 মিনিটে পূর্ণ করতে পারে। কিন্তু দ্বিতীয় নলটি পূর্ণ চৌবাচ্চাকে 12 মিনিটে খালি করে। অর্ধ জলপূর্ণ অবস্থায় নল দু'টি একসঙ্গে খুলে দিলে কত সময়ে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ অথবা খালি হবে?

প্রথম নল 18 মিনিটে সম্পূর্ণ চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করে

∴ প্রথম নল 1 মিনিটে $\frac{1}{18}$ অংশ পূর্ণ করে।

দ্বিতীয় নল 12 মিনিটে সম্পূর্ণ চৌবাচ্চাটি খালি করে

∴ দ্বিতীয় নল 1 মিনিটে $\frac{1}{12}$ অংশ খালি করে।

দেখা যাচ্ছে এখানে ভর্তি হওয়ার হারের চেয়ে খালি হওয়ার হার বেশী, কারণ $\frac{1}{18}$ অংশের চেয়ে $\frac{1}{12}$ অংশ বড়। তাই এখানে এই অর্ধ-পূর্ণ চৌবাচ্চাটি ক্রমে খালি হওয়ার দিকে যাবে। আর যে হারে তা হবে তা হলো—

দ্বিতীয় নল 1 মিনিটে খালি করে $\frac{1}{12}$ অংশ

প্রথম নল 1 মিনিটে পূর্ণ করে $\frac{1}{18}$ অংশ

∴ নল দুটি একসঙ্গে খোলা থাকলে 1 মিনিটে খালি হবে $(\frac{1}{12} - \frac{1}{18})$ অংশ $= \frac{1}{36}$ অংশ

বিঃ দ্রঃ বীজগণিতের প্রয়োগ :

প্রথম নল 1 মিনিটে পূর্ণ করে $\frac{1}{18}$ অংশ = প্রথম নল 1 মিনিটে খালি করে $-\frac{1}{18}$ অংশ

প্রথম নল 1 মিনিটে খালি করে $-\frac{1}{১৮}$ অংশ

দ্বিতীয় নল 1 মিনিটে খালি করে $\frac{1}{১২}$ অংশ

∴ নল দুটি একসঙ্গে 1 মিনিটে খালি করে

$\{(-\frac{1}{১৮})+(\frac{1}{১২})\}$ অংশ $=(\frac{1}{১২}-\frac{1}{১৮})$ অংশ $=\frac{1}{৩৬}$ অংশ

এখন সমস্যাটি থাকবে :

অংশ	সময় (মিনিটে)
$\frac{1}{৩৬}$	1
$\frac{1}{২}$	?

∴ নল দুটি $\frac{1}{৩৬}$ অংশ খালি করে 1 মিনিটে

∴ নল দুটি সম্পূর্ণ চৌবাচ্চা খালি করবে $(1\div\frac{1}{৩৬})$ মিনিটে

$=36$ মিনিটে

∴ নল দুটি $\frac{1}{২}$ অংশ খালি করবে $(36\times\frac{1}{২})$ মিনিটে

$=18$ মিনিটে

∴ দুটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে অর্ধপূর্ণ চৌবাচ্চাটি 18 মিনিটে খালি হয়।

প্রশ্নমালা 12

1. একটি চৌবাচ্চায় দু'টি নল আছে। নল দু'টি দিয়ে খালি চৌবাচ্চা যথাক্রমে 12 মিনিটে ও 15 মিনিটে পূর্ণ হয়। নল দু'টি একসঙ্গে খুলে দিলে খালি চৌবাচ্চা কতক্ষণে পূর্ণ হবে ?

2. একটি পেট্রোল ট্যাঙ্কে পেট্রোল বের করার জন্য দু'টি নল আছে। নল দু'টি দিয়ে ভর্তি ট্যাঙ্কটি যথাক্রমে 20 ও 30 মিনিটে খালি করা যায়। নল দু'টি যদি একসঙ্গে খুলে দেওয়া হয় তবে অর্ধেক ভর্তি ট্যাঙ্কটি কতক্ষণে খালি হবে ?

3. একটি নল দিয়ে 12 মিনিটে একটি খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ করা যায়। আবার জল বের হওয়ার গর্তটি দিয়ে ভরা চৌবাচ্চাটি 18 মিনিটে খালি হয়ে যায়। জল বের হওয়ার গর্তটি বন্ধ না করে যদি জল ভরার নলটি খুলে দেওয়া হয়, তবে খালি চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হবে ?

4. একটি নৌকার খোলে যে জল ধরে তা একটি নল দিয়ে 20 মিনিটে ছেঁচে ফেলা যায়। কিন্তু নৌকাটির তলদেশে যে ছিদ্রটি আছে তা দিয়ে খালি নৌকাটি 40 মিনিটে জলপূর্ণ হয়। ছিদ্রটি বন্ধ না করে ছেঁচে ফেলার নলটি খুলে দিলে কতক্ষণে নৌকার খোলটি জলশূন্য হবে ?

5. টিনে তেল ভরার জন্য একটি সরষের তেলের ড্রামে দু'টি নল লাগানো আছে। ড্রামটি থেকে প্রথম নল দিয়ে 25 মিনিটে এবং দ্বিতীয়টি দিয়ে 35 মিনিটে সমস্ত তেল বের করে নেওয়া যায়। প্রথম নলটি দিয়ে 5 মিনিট তেল বের করার পর দ্বিতীয় নলটিও খুলে দেওয়া হলো। কতক্ষণে ড্রামের সব তেল শেষ হয়ে যাবে ?

6. ভর্তি হওয়ার নল দিয়ে একটি খালি চৌবাচ্চা 20 মিনিটে পূর্ণ হয়, আর চৌবাচ্চাটি থেকে জল বের হওয়ার নল দিয়ে ভর্তি চৌবাচ্চাটি 70 মিনিটে খালি হয়। খালি করার নলটি বন্ধ না করে জল ভর্তি করার নলটি খুলে দিলে কতক্ষণে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হবে ?

7. কেরোসিন তেলের একটি ড্রাম একটি নল দিয়ে 40 মিনিটে পূর্ণ করা যায়। আবার তা থেকে তেল বের করার নলটি দিয়ে 60 মিনিটে পূর্ণ ড্রামের সব তেল বের করে দেওয়া যায়। ড্রামটি যখন $\frac{2}{3}$ অংশ পূর্ণ ছিল তখন তা থেকে বের করার নল দিয়ে 15 মিনিট তেল বের করা হলো। পরে সেই নল বন্ধ করে ভর্তি করার নলটি খুলে দেওয়া হলো। কতক্ষণে ড্রামটি আবার পূর্ণ হবে ?

8. একটি বাড়ীর ছাদে যে জলের ট্যাঙ্ক আছে তা একটি নল দিয়ে 30 মিনিটে পূর্ণ করা যায়। বাড়ীর কাজের জন্য যে নলটি আছে তা খুলে দিলে 45 মিনিটে পূর্ণ ট্যাঙ্কটি খালি হয়ে যায়। ট্যাঙ্কটি অর্ধপূর্ণ অবস্থায় দুটি নল একসঙ্গে কাজ করলে কতক্ষণে ট্যাঙ্কটি পূর্ণ হবে ?

9. তেল পূর্ণ একটি ট্যাঙ্ক হঠাৎ ফুটো হয়ে 10 মিনিটে কিছু তেল পড়ে গেল। তারপর ছিদ্রটি বন্ধ করে তেল ভরার নল দিয়ে আবার ট্যাঙ্কটি 4 মিনিটে ভর্তি করা হলো। ভর্তি করার নলটি যদি খালি ট্যাঙ্কটি 28 মিনিটে ভর্তি করতে পারে, তবে ফুটোটি ধরা না পড়লে কতক্ষণে ভর্তি ট্যাঙ্কের সব তেল পড়ে যেতো ?

10. ভর্তি হওয়ার নল দিয়ে একটি খালি চৌবাচ্চা 45 মিনিটে পূর্ণ হয়, আর জল বের হওয়ার ছিদ্র দিয়ে পূর্ণ চৌবাচ্চা 20 মিনিটে খালি হয়।

চৌবাচ্চাটি $\frac{4}{5}$ অংশ পূর্ণ অবস্থায় তা পরিষ্কার করার জন্য প্রথমে জল বের হওয়ার ছিদ্র খুলে দেওয়া হলো। সব জল বেরিয়ে যাবার পর 10 মিনিট ধরে তা পরিষ্কার করা হলো। তারপর ছিদ্র বন্ধ করে ভর্তি হওয়ার নলটি খুলে দেওয়া হলো। প্রথম থেকে শুরু করে চৌবাচ্চাটি আবার অর্ধপূর্ণ হওয়া পর্যন্ত কত সময় লাগবে ?

11. একটি বাড়ীর চৌবাচ্চা মিউনিসিপ্যালিটির জল সরবরাহের নল দিয়ে 30 মিনিটে পূর্ণ হয়। আর বাড়ীর কাজের নল খুলে এক চৌবাচ্চা জল দিয়ে 4 ঘণ্টা কাজ করা যায়। একদিন সরবরাহের নলটি মাত্র 25 মিনিট খোলা ছিল। ঐ জল দিয়ে ঐ দিন কতক্ষণ কাজ করা হয়েছিল ?

12. একটি বাড়ীর ছাদে যে ট্যাঙ্কটি আছে তা সরবরাহের নল দিয়ে 35 মিনিটে পূর্ণ হয়। আর দু'টি নল দিয়ে বাড়ীর বিভিন্ন অংশে জল যায়। এদের একটি দিয়ে 120 মিনিটে এবং অপরটি দিয়ে 140 মিনিটে এক ট্যাঙ্ক জল বেরিয়ে যায়। সকাল 6টার সময় তিনটি নল যখন একসঙ্গে খুলে দেওয়া হয়, তখন ট্যাঙ্কটি অর্ধপূর্ণ ছিল। 28 মিনিট পর সরবরাহ নলটি বন্ধ করলে কখন ট্যাঙ্কের জল সব ফুরিয়ে যাবে ?

বিবিধ প্রশ্নমালা 1

[প্রশ্নে বিশেষ নির্দেশ দেওয়া না থাকলে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানে উত্তর দাও।]

গড় নির্ণয়

1. মুখে মুখে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ

(i) 5, 6, 8, 10 ও 11এর গড় কত ?

(ii) 5টি সংখ্যার গড় 13, সংখ্যাগুলির সমষ্টি কত ?

(iii) কয়েকটি সংখ্যার গড় 9 এবং তাদের সমষ্টি 99 ; সংখ্যাগুলির সংখ্যা কত ?

(iv) তিন জন ছাত্রের বয়সের গড় 10 বছর, ঐ তিন জন ছাত্র ও নতুন আর একজন ছাত্রের বয়সের গড় 11 বছর ; নতুন ছাত্রটির বয়স কত ?

(v) উত্তম, সুদীপ ও অনুপের কাছে মোট 17টি মার্বেল আছে। তাদের আর কটি মার্বেল হলে তাদের মার্বেল সংখ্যা গড়ে 7টি হবে ?

(vi) প্রথম প্রকারের তিনটি পেন্সিলের প্রত্যেকটির দাম 60 পয়সা, দ্বিতীয় প্রকারের দুটি পেন্সিলের প্রত্যেকটির দাম 70 পয়সা, পেন্সিলগুলির গড় দাম কত হবে ?

(vii) সোমবার ও মঙ্গলবারের গড় বৃষ্টিপাত 30 সেমি ও বুধবারের বৃষ্টিপাত 18 সেমি হলে, ঐ তিন দিনের গড় বৃষ্টিপাত কত হবে ?

(viii) 10, 11, 12, 13 ও অপর একটি সংখ্যার গড় 10 : অপর সংখ্যাটি কত ?

2. 5 জন লোকের ওজন যথাক্রমে 55·2 কেজি, 57·5 কেজি, 60 কেজি, 45·4 কেজি ও 50 কেজি , তাদের গড় ওজন কত ?

3. 6 জন বালকের মধ্যে প্রথম 5 জনের উচ্চতা যথাক্রমে 131·2 সেমি, 127·8 সেমি, 126·9 সেমি, 132·4 সেমি, 130·8 সেমি, ষষ্ঠ বালকের উচ্চতা কত হলে ছয়জন বালকের গড় উচ্চতা 129 সেমি হবে ?

4. 4 মাসে প্রতি কুইন্টাল ধানের দাম যথাক্রমে 125·50 টাকা, 129·50 টাকা, 132 টাকা ও 135 টাকা ছিল। ঐ 4 মাসে ধানের কুইন্টাল প্রতি গড় দাম কত এবং ঐ 4 মাসে কুইন্টাল প্রতি ধানের দর বৃদ্ধির গড় কত ?

5. 8 জন লোকের মাসিক বেতনের গড় 295 টাকা, অন্য 2 জন লোকের মাসিক বেতন যথাক্রমে 2400 টাকা ও 2350 টাকা ; 10 জনের মাসিক বেতনের গড় কত ?

6. একটি ট্রেন প্রথম 10 মিনিট ঘণ্টায় 35 কিমি বেগে ও পরের 5 মিনিট ঘণ্টায় 20 কিমি বেগে গেল। ট্রেনটির ঘণ্টায় গড় গতিবেগ কত ?

7. 22 টাকা কেজি দরের 5 কেজি, 28 টাকা কেজি দরের 3 কেজি ও 35 টাকা কেজি দরের $2\frac{1}{2}$ কেজি চা মিশিয়ে দেওয়া হল। প্রতি কেজি চায়ের গড় দর কত হবে ?

8. ছয় জন ছাত্রের গড় নম্বর 53, প্রথম স্থানাধিকারী ছাত্র দ্বিতীয় স্থানাধিকারী ছাত্র অপেক্ষা 2 নম্বর বেশী পেয়েছে। বাকি 4 জন ছাত্রের গড় নম্বর 49। প্রথম ও দ্বিতীয় স্থানাধিকারী ছাত্র কে কত নম্বর পেয়েছে ?

9. একজন ফলবিক্রেতা প্রতি ঝুড়ি 55 টাকা দরে 32 ঝুড়ি, প্রতি ঝুড়ি 35 টাকা দরে 41 ঝুড়ি ও প্রতি ঝুড়ি 46 টাকা দরে 15 ঝুড়ি আম বিক্রয় করলেন। ঝুড়ি প্রতি গড় দাম কত হল ?

10. 8 জন লোকের দৈনিক গড় আয় 13·20 টাকা এবং অপর 14 জন লোকের দৈনিক গড় আয় 12·10 টাকা। ঐ 22 জন লোকের দৈনিক গড় আয় কত ?

11. একজন পুস্তকবিক্রেতা প্রতি পুস্তক 4·50 টাকা, 9·40 টাকা, ও 11·50 টাকা মূল্যের যথাক্রমে 15 খানি, 24 খানি ও 23 খানি পুস্তক বিক্রয় করলেন। প্রত্যেকটি পুস্তকের গড় মূল্য কত ?

12. একজন ক্রিকেট খেলোয়াড় দশটি ইনিংসে 41, 47, 50, 39, 48, 12, 42, 32, 20 ও 117 রান করেন। প্রতি ইনিংসে গড়ে তিনি কত রান করেছেন ?

13. 75, 85 ও 70-এর গড় কত ? আসন্ন পূর্ণ সংখ্যায় গড় মান কত হবে ?

14. তিনটি ইংনিসে কপিলদেব, গাভাসকার ও বেঙ্গসরকারের রান সংখ্যা নিম্নরূপ ঃ

কপিলদেব ঃ 41,89,65 ; গাভাসকার ঃ 48,24,2 ; বেঙ্গসরকার ঃ 2,159,12, প্রত্যেকের প্রতি ইনিংসে পূর্ণসংখ্যার আসন্নমানে গড় রান কত ? কার গড় রান সবচেয়ে বেশী ?

15. একটি ট্রেন প্রথম মিনিটে 500 মিটার যায়। পরবর্তী 4 মিনিটের প্রতি মিনিটে পূর্ববর্তী মিনিটের গতিবেগ অপেক্ষা 125 মিটার বেশী যায়। ঐ 5 মিনিটে ট্রেনটির গড় গতিবেগ ঘণ্টায় কত ?

16. একজন দোকানদারের প্রথম 5 মাসে বিক্রয়ের পরিমাণ যথাক্রমে 6435 টাকা, 6927 টাকা, 6855 টাকা, 7230 টাকা ও 6562 টাকা। ষষ্ঠ মাসে কত বিক্রয় হলে ঐ 6 মাসে তার মাসিক গড় বিক্রয় 6500 টাকা হবে ?

17. একটি বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণীর 28 জন ছাত্রের গড় বয়স 16 বছর 3 মাস। 8 জন ছাত্র চলে যাওয়ায় অবশিষ্ট ছাত্রদের গড় বয়স 2 মাস কমে গেল। ঐ 8 জন ছাত্রের গড় বয়স কত ?

18. প্রতি কেজি 28·50 টাকা মূল্যের 11 কেজি চা-এর সঙ্গে প্রতি কেজি 22 টাকা মূল্যের 9 কেজি চা মিশিয়ে দিলে মিশ্রিত চা-এর কেজি প্রতি গড় মূল্য কত হবে ?

19. বিদ্যালয়ের সরস্বতী পূজোর জন্য সুজিত 8·50 টাকা কেজি দরে $3\frac{1}{2}$ কেজি আপেল কিনেছে। 12 টাকা কেজি দরে কত আপেল কিনলে সব আপেলের দাম গড়ে কেজি প্রতি 10 টাকা হবে ?

20. একজন কৃষকের 5 একর ধানের জমি ও একটি সব্জির বাগান আছে। বছরে একর প্রতি গড়ে 8 কুইণ্টাল ধান হয়। কুইণ্টাল প্রতি ধানের দাম গড়ে 128 টাকা। সব্জির বাগান থেকে তার বছরে আয় 900 টাকা। ঐ কৃষকের মাসিক গড় আয় কত ?

21. একটি চারা গাছের প্রথম তিন মাসের দৈর্ঘ্য 12 সেমি, পরের 3 মাসের প্রতি মাসে তার গড় বৃদ্ধি 3·3 সেমি। ঐ 6 মাসে চারা গাছটির গড় বৃদ্ধি কত ?

22. মহিম ঘণ্টায় 4·8 কিমি বেগে গোপালপুরে গেল এবং ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে ফিরে এল। ঘণ্টায় তার গড় গতিবেগ কত ? [1 মাইল=1·6 কিমি]

23. রহমান তার ট্যাক্সিতে মিনিটে 1 কিমি বেগে কোন স্থানে গেল ও মিনিটে $1\frac{1}{2}$ কিমি বেগে ফিরে এল। ট্যাক্সিটির ঘণ্টায় গড় গতিবেগ কত ?

24. ভারতবর্ষ ও নিউজিল্যাণ্ডের মধ্যে কয়েকটি খেলায় কয়েকজন ভারতীয় খেলোয়াড়ের রান সংখ্যা দেওয়া হল। প্রত্যেকের ইনিংস প্রতি গড় রান নির্ণয় কর।

পঙ্কজ রায়—4টি ইনিংস : 0, 28, 100, 173
বিনু মানকড়—5টি ইনিংস : 30, 223, 25, 17, 231
পলি উমরিগড়—6টি ইনিংস : 223, 15, 18, 1, 5, 79
মঞ্জরেকার—5টি ইনিংস : 118, 0, 177, 1, 90

25. একটি শ্রেণীর 30 জন ছাত্রকে সমান ছয়টি ভাগে বিভক্ত করা হল। ঐ ছয়টি বিভাগের ছাত্রদের গড় বয়স যথাক্রমে 10 বছর 6 মাস, 10 বছর 8 মাস, 10 বছর 9 মাস, 10 বছর 11 মাস, 11 বছর ও 11 বছর 1 মাস, ঐ শ্রেণীর সব ছাত্রদের গড় বয়স কত ?

26. 1931 ও 1951 সালে কোন শহরের লোকসংখ্যা যথাক্রমে 698078 ও 354898, 20 বছরে বাৎসরিক গড় লোক সংখ্যা বৃদ্ধি কত ?

27 একজন লোক প্রথম 2 ঘণ্টায় $9\frac{1}{2}$ কিমি ও $8\frac{1}{2}$ কিমি যাওয়ার পর আধ ঘণ্টা বিশ্রাম নিল। পরবর্তী 3 ঘণ্টায় সমবেগে ঘণ্টায় 7 কিমি বেগে অবশিষ্ট পথ অতিক্রম করল। অতিক্রান্ত পথের দূরত্ব কত? ঘণ্টা প্রতি লোকটির গড় গতিবেগ কত ?

28. মিঃ সরকার 85000 টাকায় একটা গাড়ী কিনলেন। ড্রাইভার, পেট্রোল ও মেরামত প্রভৃতির জন্য তার বার্ষিক ব্যয় হয় 6300 টাকা। 5 বছর পরে 55000 টাকায় তিনি গাড়ীটি বিক্রয় করলেন, গাড়ীর জন্য ঐ 5 বছরে তার মাসিক গড় ব্যয় কত হল ?

29 নির্মলবাবুর এক বছরের আয় ব্যয়ের হিসাব পরের পৃষ্ঠায় দেওয়া

হল। ঐ বছরে তাঁর মাসিক গড় আয়, গড় ব্যয় ও গড় সঞ্চয়ের পরিমাণ নির্ণয় কর।

মাস	মোট আয় টাকা	মোট ব্যয় টাকা
জানুয়ারী থেকে এপ্রিল পর্যন্ত	1575·50	1186·25
মে থেকে সেপ্টেম্বর পর্যন্ত	2050·00	1680·50
অক্টোবর থেকে ডিসেম্বর পর্যন্ত	1476·75	1314·00

30. একটি রাজনৈতিক দলের পাঁচজন প্রার্থী পাঁচটি কেন্দ্রে যে ভোট পেয়েছেন তার সংখ্যা হল 28330, 15154, 28170, 46810 এবং 35034. কেন্দ্র প্রতি ভোটের গড় কত? ঐ রাজনৈতিক দলের অন্য একজন প্রার্থী ষষ্ঠ কেন্দ্রে কত ভোট পেলে কেন্দ্র প্রতি ভোটের গড় পূর্বাপেক্ষা 480 বেশী হবে? (আসন্ন শুদ্ধ পূর্ণসংখ্যায় উত্তর দাও)

31. একজন কৃষকের দৈনিক মজুরি 8·50 টাকা। সে বছরে 185 দিন কাজের সুযোগ পায়। সারা বছরে মজুরি বাবদ তার দৈনিক আয়ের গড় কত?

32 (i). নিচে কয়েকজন ছাত্র-ছাত্রীর ইংরেজী, গণিত ও ইতিহাসের নম্বর দেওয়া হয়েছে :

বিষয় ↓ / ছাত্রছাত্রীদের নাম →	ছাত্র						ছাত্রী			
	দেবু	সত্য	শুভ	লতিফ	জন	পল্টন	রুমা	ঝুমা	রিঙ্কু	চন্দ্রা
ইংরেজীতে প্রাপ্ত নম্বর	46	31	20	31	41	54	35	45	56	40
গণিতে প্রাপ্ত নম্বর	56	47	66	61	58	51	50	60	73	74
ইতিহাসে প্রাপ্ত নম্বর	41	47	31	42	36	40	51	61	47	90

উপরের তালিকার তথ্যগুলি ব্যবহার করে নিচের তালিকার শূন্যস্থানগুলো পূরণ কর

	ইংরেজী	অঙ্ক	ইতিহাস	মোট নম্বর
ছাত্রদের নম্বরের গড়				
ছাত্রীদের নম্বরের গড়				
ছাত্র ছাত্রীদের নম্বরের গড়				

32 (ii). ধরা থাক, কোন বিষয়ের গড় নম্বর থেকে বেশী নম্বর পেলে কোন ছাত্রকে ঐ বিষয়ে 'ভাল' বলা হবে ; আবার ঐ গড় নম্বর থেকে কোন ছাত্রের নম্বর কম হলে তাকে ঐ বিষয়ে 'দুর্বল' বলা হবে—এই সংজ্ঞা অনুযায়ী 32 (i)নং অঙ্কের সারণী থেকে নিচে ছাত্র-ছাত্রীদের কে কোন বিষয়গুলোতে ভাল অথবা দুর্বল তা ঠিক করে নিচের তালিকার শূন্যস্থানগুলোতে যথাযথভাবে বসাও (শূন্যস্থানগুলোতে 'ভাল' অথবা 'দুর্বল' লিখতে হবে।)

	দেবু	শুভ	জন	রুমা	রিঙ্কু	চন্দ্রা
ইংরেজী						
গণিত						
ইতিহাস						
মোট বিষয়						

33. 12টি পার্শেলের গড় ওজন 1·85 কেজি। নতুন একটি পার্শেল আসার ফলে গড় ওজন 100 গ্রাম কমে গেল। নতুন পার্শেলটির ওজন কত ?

34. একটি থিয়েটার হলের আসন সংখ্যা ও প্রতি আসনের টিকিট মূল্য দেওয়া হ'ল। ঐ থিয়েটার হলের আসনগুলোর গড় টিকিট মূল্য কত ?

টিকিট মূল্য	2 টাকা	5 টাকা	10 টাকা
আসন সংখ্যা	385	235	80

35. 28 জন ছাত্রের গড় উচ্চতা 1·4 মিটার। 8 জন ছাত্র চলে যাওয়ায় গড় উচ্চতা ·25 মিটার বেড়ে গেল। যারা চলে গেল তাদের গড় উচ্চতা কত হবে ?

36. প্রথম 4 বছরে বেকারের সংখ্যা যথাক্রমে 4069 হাজার, 5100 হাজার, 6895 হাজার ও 8218 হাজার। পরবর্তী 4 বছরে বেকার সংখ্যা যথাক্রমে 8433 হাজার, 9320 হাজার, 9784 হাজার ও 10924 হাজার। প্রথম 4 বছর অপেক্ষা পরবর্তী 4 বছরে বেকারদের বাৎসরিক গড় বৃদ্ধি কত ?

37. একদিন একটি রাস্তায় সকাল 10টা থেকে বিকাল 1টা পর্যন্ত আধ ঘণ্টা অন্তর যতগুলো গাড়ী যায় তার হিসাব নিচের তালিকায় দেওয়া হ'ল :

সময়	10 টা থেকে 10-30 মি.	10-30 মি. থেকে 11 টা	11 টা থেকে 11-30 মি.	11-30 মি. থেকে 12 টা	12 টা থেকে 12-30 মি.	12-30 মি. থেকে 1 টা.
গাড়ীর সংখ্যা	93	125	97	90	80	45

তালিকা থেকে বলতো (1) ঘণ্টায় গড়ে কয়টি গাড়ী যায় ? (2) 10টা থেকে 11-30 মিঃ পর্যন্ত গড়ে ঘণ্টায় কয়টি গাড়ী যায় ? (3) 11-30 মিঃ থেকে 1টা পর্যন্ত গড়ে ঘণ্টায় কয়টি গাড়ী যায় ?

38. নিচের অনুচ্ছেদটিতে প্রতি লাইনে গড়ে (i) অক্ষর সংখ্যা ও (ii) শব্দ সংখ্যা কত ? [আসন্ন শুদ্ধ পূর্ণ সংখ্যায় উত্তর দাও]

অমল, দই আন।
সরবৎ কর।
বরফ কই।
অধর, এ আম নয়। এ আম টক।
এ থই নয়। এ থই নরম।
এ দই নয়। এ দই জল।
ঐ দই নয়। ও দই গরম।
চল চল, আর নয়, ওঠ সব।

তপন, পড় পড়
বই কই। এ বই ওর।

আসমৎ, আঁক আঁক।
চক ধর। রঙ কর।

39. নিচের তালিকা দু'টি হতে ছাত্রদের গড় ওজন ও গড় উচ্চতা নির্ণয় কর।

ওজন (কেজি)	ছাত্র সংখ্যা
42	7
45	13
46	10

উচ্চতা (মিটার)	ছাত্র সংখ্যা
1·41	9
1·39	13
1·46	8

40. (i) একজন কৃষকের বাগানে 50টি টমেটো গাছ আছে। তিনি তার মধ্যে 10টি গাছ থেকে 11টি করে, 18টি গাছ থেকে 20টি করে ও বাকি 22টি গাছ থেকে 15টি করে টমেটো সংগ্রহ করলেন। সমস্ত টমেটোর মোট ওজন হল 40 কেজি। (*a*) প্রতি টমেটো গাছ থেকে গড়ে কটি টমেটো সংগ্রহ করা হয়েছে? (*b*) প্রতি টমেটো গাছ থেকে তিনি গড়ে কত ওজনের টমেটো পেয়েছেন?

(ii) তিনি 40 কেজির মধ্যে 12 কেজি প্রতি কেজি 1·20 টাকা দরে, 20 কেজি প্রতি কেজি 1·25 টাকা দরে ও 8 কেজি প্রতি কেজি 1·50 টাকা দরে বিক্রি করলেন। (*a*) প্রত্যেকটি টমেটো গাছ থেকে তিনি গড়ে কত মূল্যের টমেটো পেলেন? (*b*) প্রতিটি টমেটোর গড় দাম ও গড় ওজন কত?

41. দুটি ছাত্রদলের প্রত্যেকের উচ্চতা, ওজন ও পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হল:

প্রথম দল

	জাফর	সুবীর	অনিল	তাপসী	সুমন	নন্দিনী	উৎপল
উচ্চতা (মিটার)	1·6	1·43	1·60	1·53	1·59	1·53	1·4
ওজন (কেজি)	45·5	48·4	47·4	27·4	25·34	27·3	24·1
পরীক্ষার নম্বর	445	536	323	245	378	426	495

দ্বিতীয় দল

	জীবন	জাহ্নবী	বেবী	ইকবাল	স্বপন	মুস্তাক
উচ্চতা (মিটার)	1·42	1·5	1·54	1·42	1·39	1·3
ওজন (কেজি)	41	44·2	46·4	47·1	43·6	31·2
পরীক্ষার নম্বর	378	521	278	476	473	379

(i) প্রত্যেক দল ছাত্রের গড় উচ্চতা, গড় ওজন ও পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় কর। (ii) কোন্ দলের গড় উচ্চতা সবচেয়ে বেশী? (iii) কোন্ দলের গড় ওজন সবচেয়ে কম? (iv) দুটি দলের সব ছাত্রদের নিয়ে একটি নতুন দল গঠন করলে ঐ নতুন দলের গড় উচ্চতা, গড় ওজন ও পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বরের গড় কত হবে?

বিবিধ প্রশ্নমালা 2

বর্গমূল নির্ণয়

(1 থেকে 3 নম্বর প্রশ্নগুলি মুখে মুখে উত্তর দিতে চেষ্টা কর। প্রয়োজন বোধে রাফ কাজ করবে। বিশেষ নির্দেশ না থাকলে উত্তর দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমানে দেবে।)

1. বর্গমূল নির্ণয় কর :

(i) $\frac{4}{25}$ (ii) $\frac{1}{121}$ (iii) $\frac{49}{64}$ (iv) $\frac{1}{225}$ (v) $6\frac{1}{4}$ (vi) $7\frac{9}{16}$
(vii) ·81 (viii) ·09 (ix) ·01 (x) ·0001
(xi) ·0049 (xii) ·000001

2. বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{1}{9}}, \sqrt{\frac{1}{16}}, \sqrt{\frac{1}{25}}$ (ii) $\sqrt{\frac{26}{25}}, \sqrt{\frac{36}{25}}, 1, \sqrt{\frac{16}{25}}$

(iii) $\sqrt{\frac{4}{25}}, \sqrt{\frac{6}{25}}, \frac{\sqrt{5}}{5}$ (iv) $\sqrt{\frac{16}{25}}, \sqrt{\frac{25}{36}}, \sqrt{\frac{36}{49}}$

(v) $\sqrt{\frac{81}{100}}, \frac{\sqrt{89}}{10}, \frac{9}{11}$ (vi) $\sqrt{\frac{64}{49}}, \sqrt{2\frac{7}{25}}, \sqrt{\frac{121}{169}}$

(vii) $\sqrt{\cdot01}, \sqrt{\cdot0001}, \sqrt{\cdot000001}$ (viii) $\sqrt{\cdot04}, \sqrt{\cdot09}, \sqrt{\cdot0004}, \sqrt{\cdot0009}$ (ix) $\sqrt{\cdot64}, \sqrt{\cdot0121}, \sqrt{\cdot7}$

(x) $\sqrt{3}, \sqrt{2\cdot25}, \sqrt{\cdot81}$ (xi) $\cdot09, (\cdot09)^2, \sqrt{\cdot09}$

(xii) $2, \sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}$

3. (i) একজন গরীব ছেলেকে সাহায্য করার জন্য কয়েকজন ছেলে ঠিক করল—তারা যতজন আছে, প্রত্যেকে তত পয়সা দেবে। এর ফলে মোট 6·25 টাকা সংগৃহীত হল। সাহায্যকারী ছেলেদের সংখ্যা কত ?

(ii) বনভোজনে যত জন ছেলেমেয়ে এসেছিল, প্রত্যেকে ততটি 20 পয়সা চাঁদা দিল। সংগৃহীত চাঁদার পরিমাণ 3·20 টাকা হলে মোট ছেলেমেয়ের সংখ্যা কত ?

(iii) 1·56এর সঙ্গে কোন্ ক্ষুদ্রতম পূর্ণসংখ্যা যোগ করলে যোগফল একটি বর্গসংখ্যা হবে ?

(iv) একটি আয়তাকার জমির দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ। ক্ষেত্রফল 200 বর্গমিটার হলে জমিটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

(v) দুটি সংখ্যার গুণফল 02 ও ভাগফল 2. সংখ্যা দুটি কি কি ?

4. বর্গমূল নির্ণয় কর :

(*a*) $3\frac{61}{100}$, $4\frac{21}{25}$, $272\frac{1}{4}$, $\frac{1521}{4096}$, $\frac{9409}{15129}$

(*b*) 70·56, 151·29, 15227·56, $\frac{16\cdot9}{22\cdot5}$, ·051076

(*c*) $1\frac{788}{4901}$, ·000324, $15\frac{21}{100}$, 1082·41, ·00053361

(*d*) 2, 3, 5, 7, 11 ; (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান)

(*e*) ·9, ·0013, ·00064, 23·1, 15·611

(*f*) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{11}$, $1\frac{3}{14}$, $131\frac{12}{25}$

(*g*) $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}$, $\frac{2}{2\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}$, $1\cdot3+2\cdot\dot{1}$, ·5

5. 119·678এর সঙ্গে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণসংখ্যার বর্গ হবে ?

6. $31\frac{1}{5}$এর সঙ্গে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা গুণ করলে গুণফল একটি পূর্ণসংখ্যার বর্গ হবে ?

7. একটি স্কুলে যত জন ছাত্র প্রত্যেকে তত পয়সা চাঁদা দেওয়ায় মোট 640·09 টাকা চাঁদা উঠল। স্কুলে ছাত্র সংখ্যা কত ? প্রত্যেকে কত চাঁদা দিয়েছিল ?

8. একটি গ্রামে বিদ্যালয়-গৃহ মেরামত করার জন্য গ্রামবাসীদের কাছ থেকে চাঁদা নেওয়ার সিদ্ধান্ত হল। দেখা গেল, যত জন গ্রামবাসী আছে, প্রত্যেকে তত দু'পয়সা দিলে মোট 915·92 টাকা চাঁদা উঠতে পারে। ঐ গ্রামে গ্রামবাসীর সংখ্যা কত ?

9. একটি বর্গাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 1·5 হেক্টর, ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য কত মিটার ? (1 হেক্টর=10000 বর্গমিটার)

10. একটি আয়তাকার মাঠের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দেড় গুণ এবং ক্ষেত্রফল ·4704 হেক্টর ; তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত মিটার ?

11. একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য প্রস্থের 3 গুণ। যদি মেঝেটি পাকা করতে প্রতি বর্গমিটার 10·20 টাকা হিসাবে মোট 191·25 টাকা লাগে, তবে ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

12. একটি আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল 160 হেক্টর। তার দৈর্ঘ্য প্রস্থের $2\frac{1}{2}$ গুণ হলে, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

13. বর্গমূল নির্ণয় কর :

$$\sqrt{\frac{5\times22+7\times28+10\times33+3\times38}{30}}$$

14. 72 বর্গমিটার ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট মেঝেতে সমবাহুবিশিষ্ট 50টি বর্গাকার পাথর লাগল। প্রত্যেকটি পাথরের দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল কত ?

15. একটি বৃত্তাকার পার্কের ক্ষেত্রফল 15400 বর্গমিটার। ঐ পার্কের ব্যাসার্ধ কত মিটার ? ধরে নাও,

বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\sqrt{\frac{7}{22}\times}$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

16. দুটি রাশির গুণফলের বর্গমূলকে ঐ রাশিদ্বয়ের 'গুণোত্তরীয় মধ্যক' বলা হয়।

1·21 ও 6·25 সংখ্যা দুটির গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

17. কোন বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি হলে, তার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত হবে ? (ধরে নাও, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য

$=\sqrt{2}\times$ বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য)

18. $a=1·9$, $b=2·1$ হলে, $a^2+2ab+b^2$ এর মান ও তার বর্গমূল নির্ণয় কর।

19. নির্দেশিত মান বসিয়ে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান পূর্ণসংখ্যার আসন্ন মানে নির্ণয় কর :

(a) $\sqrt{l^2+b^2}$; যখন $l=2·5$ সেমি, $b=1·5$ সেমি

(b) $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; যখন $\pi=\frac{22}{7}$, $l=98$, $g=980$

(c) $\sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$; যখন $V=462$, $\pi=\frac{22}{7}$, $h=9$

(d) $\sqrt{\frac{A}{4\pi}}$; যখন $A=5544$ ও $\pi=\frac{22}{7}$

(e) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; যখন $a=3, b=4, c=12$

(f) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; যখন $a=3$ সেমি, $b=4$ সেমি

$c=5$ সেমি এবং $s=\frac{a+b+c}{2}$

(g) $\frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}$
যখন $a=15$ সেমি, $b=14$ সেমি, $c=13$ সেমি

(h) $\sqrt{ab+bc+ca}$; যখন $a=b=c=5$.

বিবিধ প্রশ্নমালা 3

সময় ও দূরত্ব

(1 নম্বর প্রশ্নের উত্তর মুখে মুখে দাও। বিশেষভাবে নির্দেশ না থাকলে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানে উত্তর দেবে)।

1. সত্য মিথ্যা নির্দেশ কর :

(a) গতিবেগ $=\frac{\text{অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{সময়}}$ (b) দূরত্ব $=\frac{\text{গতিবেগ}}{\text{সময়}}$

(c) গতিবেগ $=$ সময় $\times$ দূরত্ব (d) সময় $=$ গতিবেগ $\times$ দূরত্ব

(e) যদি গতিবেগ নির্দিষ্ট থাকে, তবে কম সময়ে বেশী দূরত্ব অতিক্রম করা যাবে।

(f) যদি গতিবেগ নির্দিষ্ট থাকে, তবে বেশী সময়ে বেশী দূরত্ব অতিক্রম করা যাবে।

(g) গতিবেগ বেশী হলে কম সময়ে একটি নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করা যায়।

(h) গতিবেগ কম হলে কম সময়ে একটি নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করা যাবে।

(*i*) সময় নির্দিষ্ট থাকলে গতিবেগ বেশী হলে বেশী দূরত্ব অতিক্রম করা যায়।

(*j*) সময় একই থাকলে, গতিবেগ কম হলে অতিক্রান্ত দূরত্বও কম হবে।

(*k*) দু'জন লোক একই স্থান থেকে একই দিকে যথাক্রমে মিনিটে 30 মিটার ও মিনিটে 20 মিটার বেগে হাঁটতে আরম্ভ করলেন। 1 মিনিট পরে তাদের মধ্যে দূরত্ব হবে 50 মিটার।

(*l*) (*k*) প্রশ্নে লোক দু'জন যদি বিপরীত দিকে হাঁটত, 1 মিনিট পরে তাঁদের দূরত্ব হত 10 মিটার।

2. (*a*) কমল 10 মিনিটে $\frac{1}{2}$ কিমি পথ গেল। তার ঘণ্টায় গতিবেগ কত ?

(*b*) সুরেন ঘণ্টায় 5 কিমি পথ গেলে, 5 মিনিটে সে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে ?

(*c*) রমা 100 মিটার দূরত্ব 20 সেকেণ্ডে দৌড়ায়। এক সেকেণ্ডে সে কত দূরত্ব দৌড়াবে ?

(*d*) সুরজিত ও কমলজিত একই স্থান থেকে একই দিকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 4 কিমি ও ঘণ্টায় 6 কিমি দূরত্ব যায়। 2 ঘণ্টা পরে তাদের মধ্যে দূরত্ব কত হবে ?

(*e*) পরেশবাবু ও রমেশবাবু একই স্থান থেকে একই সময়ে যথাক্রমে ঘণ্টায় 8 কিমি ও 5 কিমি বেগে পরস্পর বিপরীত দিকে যাত্রা করলেন। 3 ঘণ্টার পরে তাদের মধ্যে দূরত্ব কত হবে ?

(*f*) 100 মিটার দীর্ঘ একটি ট্রেণ ঘণ্টায় 30 কিমি বেগে কত সময়ে একটি খুঁটিকে অতিক্রম করবে ? ঐ ট্রেণটি কত সময়ে 200 মিটার দীর্ঘ একটি প্ল্যাটফরমকে অতিক্রম করবে ?

(*g*) 100 মিটার ও 200 মিটার দীর্ঘ দুটি ট্রেণ যথাক্রমে ঘণ্টায় 60 কিমি ও ঘণ্টায় 30 কিমি বেগে একই দিকে যাত্রা করল। কত সময়ে তারা পরস্পরকে অতিক্রম করবে ? তারা যদি বিপরীত দিকে যাত্রা করত, তবে কত সময়ে তারা পরস্পরকে অতিক্রম করত ?

3. নিচের তালিকায় শূন্যস্থানগুলি যথাযথ একক উল্লেখ করে পূরণ কর ঃ

গতিবেগ	অতিক্রান্ত দূরত্ব	সময়
ঘণ্টায় 5 কিমি	500 মিটার	
3 মিনিটে 150 মিটার	3 কিমি	
সেকেণ্ডে 100 মিটার	3 কিমি	
ঘণ্টায় 5 কিমি		12 মিনিট
3 মিনিটে 150 মিটার		20 সেকেণ্ড
সেকেণ্ডে 100 মিটার		2 ঘণ্টা
ঘণ্টায়	300 মিটার	5 মিনিট
মিনিটে	15 মিটার	5 সেকেণ্ড
সেকেণ্ডে	1·8 কিমি	2 ঘণ্টা

4. বজ্রপাতের আলো দেখার $3\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পরে একজন তার শব্দ শুনতে পেলেন। লোকটির কাছ থেকে বজ্রপাতের স্থানের দূরত্ব কত ?

(ধরে নাও, বজ্রপাতের সঙ্গে সঙ্গেই লোকটি আলো দেখেছেন এবং শব্দের গতিবেগ সেকেণ্ডে 330 মিটার)

5. একজন লোক 6 মিনিটে 516 মিটার পথ অতিক্রম করলেন। ঘণ্টায় তাঁর গতিবেগ কত ?

6. একজন সাইকেল আরোহী ঘণ্টায় $13\frac{1}{2}$ কিমি বেগে একটি সেতুকে $7\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডে অতিক্রম করলেন। সেতুটির দৈর্ঘ্য কত ?

7. 50 মিটার দীর্ঘ একটি ট্রেণ ঘণ্টায় 36 কিমি বেগে যায়। রাস্তার পাশের একটি খুঁটিকে ট্রেণটি কত সময়ে অতিক্রম করবে ?

8. 56 মিটার দীর্ঘ একটি ট্রেণ 4 সেকেণ্ডে রাস্তার ধারের একটি গাছকে অতিক্রম করে। ট্রেণটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত ?

9. একটি বাস গাড়ী ঘণ্টায় 54 কিমি বেগে যায়। গাড়ীটি

5 সেকেণ্ডে রাস্তার পাশে পর পর দুটি খুঁটি অতিক্রম করল। খুঁটি দুটির মধ্যে দূরত্ব কত ?

10. 70 মিটার লম্বা একটি ট্রেণ ঘণ্টায় 75 কিমি বেগে যায়। ঐ ট্রেণ কত সময়ে 105 মিটার লম্বা একটি স্টেশন অতিক্রম করবে ?

11. স্থির জলে একটি নৌকার গতিবেগ ঘণ্টায় 10 কিমি। একটি নদীর স্রোতের গতিবেগ ঘণ্টায় 2 কিমি। কত সময়ে একজন লোক নদীপথে নৌকাযোগে 600 মিটার যেতে পারবেন যদি

(*a*) নৌকা স্রোতের অনুকূলে যায়,

বা (*b*) নৌকা স্রোতের প্রতিকূলে যায় ?

12. দুটি পাহাড়ের মধ্যে দূরত্ব 1·15 কিমি। প্রথম পাহাড়ের উপর একজন লোক দ্বিতীয় পাহাড়ের উপরে দণ্ডায়মান বন্দুকধারীর বন্দুকের স্ফুলিঙ্গ দেখার 5 সেকেণ্ড পরে তার শব্দ শুনতে পেল। প্রতি সেকেণ্ডে শব্দের গতিবেগ কত ? স্ফুলিঙ্গ দেখার 13 সেকেণ্ড পরে তৃতীয় একজন ব্যক্তি ঐ শব্দ শুনতে পেল। বন্দুকধারী ও তৃতীয় ব্যক্তির মধ্যে দূরত্ব কত ?

13. একটি ট্রেন সকাল $8\frac{1}{2}$টায় বর্ধমান থেকে রওনা হয়ে 11টার সময় হাওড়ায় পৌছে। অপর একটি ট্রেন ঐ দিন সকাল $7\frac{1}{2}$টায় হাওড়া থেকে রওনা হয়ে $12\frac{1}{2}$টার সময় বর্ধমান পৌছে। কখন তাদের মধ্যে সাক্ষাৎ হবে ?

14. একটি বাস 11টার সময় ঘণ্টায় 20 কিমি বেগে যাত্রা করল, একই স্থান থেকে একখানি স্কুটার বেলা 12টা 24 মিনিটে বেরিয়ে সন্ধ্যা 6টার সময় বাসটিকে ধরল। স্কুটারের গতিবেগ ঘণ্টায় কত ?

15. দু'জন লোক 35 কিমি দূরবর্তী দুটি স্থান থেকে পরস্পর পরস্পরের সঙ্গে সাক্ষাৎ করার জন্য যাত্রা করলেন। তাঁদের গতিবেগ যদি ঘণ্টায় 6 কিমি ও ঘণ্টায় 8 কিমি হয়, তবে কতক্ষণ পরে তাঁদের সাক্ষাৎ হবে ?

16. ঘণ্টায় 48 কিমি বেগে ধাবমান 100 মিটার দীর্ঘ একটি

ট্রেন 21 সেকেণ্ডে পাহাড়ের ভিতর দিয়ে একটি সুড়ঙ্গ রাস্তা অতিক্রম করল। সুড়ঙ্গ রাস্তাটির দৈর্ঘ্য কত?

17. একই দিকে ধাবমান দুটি গাড়ীর মধ্যে দূরত্ব 40 কিমি। পেছনের গাড়ী ঘণ্টায় 25 কিমি বেগে ও সামনের গাড়ীটি ঘণ্টায় 20 কিমি বেগে যায়। দুটি গাড়ী সমান্তরাল পথে গেলে, কতক্ষণ পরে তাদের সাক্ষাৎ হবে? পেছনের গাড়ী ঐ সময়ে কত রাস্তা অতিক্রম করবে?

18. অমল ও অসিতের মধ্যে দূরত্ব 700 মিটার। অমল ও অসিত যথাক্রমে ঘণ্টায় $6\frac{1}{2}$ কিমি ও ঘণ্টায় কিমি বেগে একই রাস্তার একই দিকে যখন হাঁটতে আরম্ভ করল তখন অমল পেছনে ছিল। কতক্ষণ পরে পরস্পরের সঙ্গে সাক্ষাত হবে এবং ঐ সময়ে কে কত পথ অতিক্রম করবে?

19. একজন লোক কেনা-কাটা করার জন্য সকাল 8টায় ঘণ্টায় 8 কিমি বেগে তাঁর বাড়ী থেকে নিকটবর্তী শহরে গেলেন ও ঘণ্টায় 6 কিমি বেগে বিকেল 2টায় বাড়ী ফিরে এলেন। শহরে কেনা কাটার জন্য তাঁর $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা সময় লেগেছিল। লোকটির গ্রাম থেকে শহরের দূরত্ব কত?

20. একজন নৌকারোহী স্রোতের অনুকূলে 4 ঘণ্টায় 28 কিমি দূরত্ব অতিক্রম করলেন। স্রোতের প্রতিকূলে একই দূরত্ব ফিরে আসতে তাঁর সময় লাগল 7 ঘণ্টা। স্থির জলে নৌকার গতিবেগ ও নদী স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

21. 120 মিটার ও 90 মিটার দীর্ঘ দু'টি ট্রেন একই দিকে গেলে 30 সেকেণ্ডে ও বিপরীত দিকে গেলে 5 সেকেণ্ডে পরস্পরকে অতিক্রম করে। ট্রেন দু'টির প্রত্যেকটির গতিবেগ কত?

22. একজন লোক ঘণ্টায় 2 কিমি বেগে পাহাড়ের চূড়ায় উঠলেন ও ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ কিমি বেগে পূর্বস্থানে ফিরে এলেন, পাহাড়ে ওঠানামার জন্য যদি তাঁর মোট $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টা লেগে থাকে, তবে তিনি মোট কতপথ যাতায়াত করেছেন?

23. আব্দুল মাঝি 4 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 20 কিমি গেলেন

ও একই রাস্তা স্রোতের প্রতিকূলে 12 ঘণ্টায় ফিরে এলেন। নৌকার গতিবেগ ও স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

24. একজন কৃষকের বাড়ী থেকে তার ধান ক্ষেত 1·2 কিমি দূরে। বাড়ী থেকে তিনি ধানক্ষেতে মিনিটে 60 মিটার বেগে যান ও মিনিটে 80 মিটার বেগে ওখান থেকে ধানের বোঝা নিয়ে ফিরে আসেন। মাঠে ধানের বোঝা বাঁধার জন্য ও বিশ্রামের জন্য প্রতিবারে তার 10 মিনিট লাগে। সকাল 6টা থেকে 12টা ও বিকেল 2টা থেকে 5-30 পর্যন্ত তার কাজের সময় হলে তিনি বেশী পক্ষে কবার ক্ষেত থেকে ধানের বোঝা বাড়ী নিয়ে যেতে পারবেন? ঐভাবে সারাদিনে তিনি কত কিমি পথ অতিক্রম করবেন?

25. (i) 100 মিটার ও 120 মিটার লম্বা দুটি ট্রেণ 25 কিমি দূরবর্তী দুটি স্টেশন থেকে যথাক্রমে সকাল 10টা ও 10-30 মিনিটে পরস্পরের দিকে সমান্তরাল রেলপথে যাত্রা করল। প্রথম ও দ্বিতীয় ট্রেণের গতিবেগ যথাক্রমে 30 কিমি ও 42 কিমি।

(a) কখন প্রথম ট্রেণের ইঞ্জিন ড্রাইভারের সঙ্গে দ্বিতীয় ট্রেণের ইঞ্জিন ড্রাইভারের সাক্ষাৎ হবে?

(b) কখন প্রথম ট্রেণের ইঞ্জিন ড্রাইভারের সঙ্গে দ্বিতীয় ট্রেণের শেষ কামরার যাত্রীর সাক্ষাৎ হবে?

(c) কখন প্রথম ট্রেণের শেষ কামরার যাত্রীর সঙ্গে দ্বিতীয় ট্রেণের ইঞ্জিন ড্রাইভারের সাক্ষাৎ হবে?

(d) কখন প্রথম ট্রেণের শেষ কামরার যাত্রীর সঙ্গে দ্বিতীয় ট্রেণের শেষ কামরার যাত্রীর সাক্ষাৎ হবে?

(e) কখন ট্রেণ দুটির মধ্যে দূরত্ব 1 কিমি হবে?

(ধরে নাও, ইঞ্জিন ড্রাইভার প্রথম কামরার সামনের প্রান্তে ও শেষ কামরার যাত্রী ঐ কামরার শেষ প্রান্তে আছে)।

(ii) ঐ ট্রেণ দুটি যদি সকাল 10টার সময় একই স্থান থেকে একই দিকে যাত্রা করত, তবে উপরের (b), (c), (d) ও (e) প্রশ্নের উত্তর যা হ'ত তা নির্ণয় কর।

26. ঘণ্টায় 45 কিমি বেগে ধাবমান 115 মিটার লম্বা একটি ষ্টীমার ঘণ্টায় 18 কিমি বেগে ধাবমান 65 মিটার লম্বা একটি নৌকা পরস্পরের দিকে একই সরলপথে যাচ্ছে। নৌকার কাছে পৌছে তাকে অতিক্রম করতে ষ্টীমারের কত সময় লাগবে ?

বিবিধ প্রশ্নমালা 4

সময় ও কার্য

1. মুখে মুখে উত্তর দাও :

1 জন লোক একটি কাজ 5 দিনে করতে পারেন।

(a) 1 জন লোক ঐ কাজ কত দিনে করবেন?

(b) 5 জন লোক ঐ কাজ কত দিনে করতে পারবেন ?

(c) 5 জন লোক ঐ কাজের তিনগুণ একটি কাজ কতদিনে করবেন ?

(d) 5 দিনে ঐ কাজ কত জনে করবেন?

(e) 5 দিনে ঐ কাজের দ্বিগুণ কাজ কত জনে করবেন?

(f) 1 দিনে ঐ কাজটি করতে হলে কত জন লোক লাগবে ?

(g) 15 দিনে ঐ কাজটির তিনগুণ কাজ করতে কতজন লোক লাগবে ?

(h) আরও বেশী লোক নেওয়া হলে, ঐ কাজ করতে কি পূর্বাপেক্ষা বেশী দিন লাগবে, না কম দিন লাগবে ?

2. মধু একটি কাজ 12 দিনে ও বিধু ঐ কাজ 10 দিনে করতে পারে।

(a) উভয়ে একসঙ্গে কাজ করলে ঐ কাজ কত দিনে সম্পন্ন হবে ?

(b) মধু একা 8 দিন কাজ করার পর বিধু যোগ দিলে দুজনে মিলে আর কত দিনে কাজটি করতে পারতো ?

(c) মধু একা 8 দিন কাজ করার পর চলে গেলে বিধু একা কত দিনে বাকি কাজটি করতো ?

(d) সিধু সম্পূর্ণ কাজটি 8 দিনে করতে পারে। মধু, বিধু ও সিধু একসঙ্গে কাজ আরম্ভ করলে ঐ কাজটি কত দিনে সম্পন্ন করতে পারতো ?

(e) মধু 4 দিন কাজ করার পর কমল এসে যোগ দিল, উভয়ে আর 6 দিনে কাজটি শেষ করল। কমল 1 দিনে ঐ কাজটির কত অংশ করতে পারে ? সে একা কত দিনে ঐ কাজটি সম্পন্ন করতে পারে ?

(f) মধু ও বিধু দুজনে কত দিনে ঐ রকম 5টি কাজ করতে পারবে ?

(g) বিধু, সিধু ও কমল প্রত্যেকে যদি মধুর মতো একই হারে কাজ করতো, তবে সকলে মিলে কাজ আরম্ভ করলে কত দিনে কাজটি শেষ হতো ?

যদি একসঙ্গে কাজ আরম্ভ করার পর প্রথম দিনের শেষে মধু, দ্বিতীয় দিনের শেষে বিধু ও তৃতীয় দিনের শেষে সিধু চলে যেত, তবে কমল আর কত দিনে ঐ কাজটি শেষ করতে পারতো ?

3. 15 জন লোক 12 দিনে 630 টাকা উপার্জন করেন। কত দিনে 4 জন লোক 112 টাকা উপার্জন করবেন ?

4. 6টি গরু 25 দিনে 12 হেক্টর জমি চাষ করতে পারে। 10টি গরু 20 দিনে কত হেক্টর জমি চাষ করতে পারবে ?

5. 10টি পাম্প 10 ঘণ্টায় 75 টন জল তুলতে পারে। 15টি পাম্প 100 টন জল কত ঘণ্টায় তুলবে ?

6. 25 জন লোক 20 দিনে 12 মিটার লম্বা একটি পুকুর খুঁড়তে পারেন। 21 মিটার লম্বা একটি পুকুর কতজন লোক 25 দিনে খুঁড়তে পারবেন ? (পুকুরের প্রস্থ একই থাকবে।)

7. 25টি উনুন 5 ঘণ্টা জ্বালালে 3 কুইণ্টাল কয়লা লাগে, 18টি উনুন 8 ঘণ্টা জ্বালালে কত কুইণ্টাল কয়লা লাগবে ?

8. 15 জন লোক 5 দিনে 3 মিটার উঁচু একটি দেওয়াল তৈরি

করতে পারেন। কত জন লোক 2 দিনে 4 মিটার উঁচু দেওয়াল তৈরি করতে পারবেন? (দেওয়ালের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ একই থাকবে)

9. 6 জন লোক দৈনিক 6 ঘণ্টা কাজ করে 8 দিনে 5 একর জমি চাষ করেন। 10 জন লোক দৈনিক 8 ঘণ্টা কাজ করে 12 দিনে কত জমি চাষ করবেন?

10. 125 জন লোক যদি একটি কাজ 120 দিনে করতে পারেন, তাহলে কত জন লোক ঐ কাজ 100 দিনে করতে পারবেন?

11. 6 জন লোকে 5 ঘণ্টায় এক ট্রাক কয়লা নামাতে পারেন। 15 জন লোক কত ঘণ্টায় 3 ট্রাক কয়লা নামাতে পারবেন?

12. (i) লতিফ ও মহিম যথাক্রমে 10 ও 12 দিনে এক একর জমিতে চারা রোপণ করতে পারে। তারা একসঙ্গে কাজ করলে কতদিনে 3 একর জমিতে চারা রোপণ করতে পারবে? 3 একর জমির কে কত একরে চারা রোপণ করেছে?

(ii) দুজনের প্রত্যেকেই যদি 10 দিনে এক একর জমিতে চারা রোপণ করতে পারতো, তবে কত দিনে তারা একত্রে 3 একর জমিতে চারা রোপণ শেষ করত?

13. 15 জন কয়লা শ্রমিক দৈনিক 8 ঘণ্টা কাজ করে 7 দিনে 2 মেট্রিক টন কয়লা কাটতে পারেন। দৈনিক 7 ঘণ্টা কাজ করে 2 মাসে 500 মেট্রিক টন কয়লা কাটতে হলে কতজন কয়লা শ্রমিক লাগবে?

14. সুবল ও অমর একত্রে একটি কাজ $11\frac{1}{9}$ দিনে করতে পারে। সুবল একা ঐ কাজ 20 দিনে করতে পারে। সুবল একা 8 দিন কাজ করার পর সুবল ও জয়গোপাল একত্রে 6 দিন ঐ কাজটি করল। শেষে অমর অবশিষ্ট কাজ 3 দিনে শেষ করল।

কেবল অমর ও জয়গোপাল যদি ঐ কাজটি একত্রে করতো, তবে কতদিনে তারা কাজটি সম্পন্ন করতে পারতো?

15. 5 জন টাইপ-কর্মী 5 মিনিটে মোট 25 লাইন টাইপ করতে পারেন। 16 জন টাইপ-কর্মী 16 মিনিটে কত লাইন টাইপ করতে পারবেন?

16. (*a*) ক একটি কাজ 10 দিনে ও খ একটি কাজ 15 দিনে সম্পন্ন করতে পারে। ক ও খ একসঙ্গে ঐ কাজটি কতদিনে সম্পন্ন করবেন?

(*b*) ধরে নাও, ক কাজটি x দিনে ও খ কাজটি y দিনে করেন। উভয়ে একসঙ্গে কাজ করলে ঐ কাজটি কতদিনে করবেন? (ঐ দিন সংখ্যা x ও yএর আকারে প্রকাশ কর)। ঐ দিনসংখ্যার সূত্রে x-এর মান 10 ও y-এর মান 15 ধরে, (*a*)এর উত্তরের সত্যতা যাচাই কর। ঐ সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত প্রশ্ন দুটি সমাধান কর:

(*c*) কাশীনাথ একটি কাজ 8 দিনে ও বিশ্বনাথ ঐ কাজটি 10 দিনে সম্পন্ন করতে পারে। উহারা একসঙ্গে কাজ করলে ঐ কাজটি কত দিনে সম্পন্ন হবে?

(*d*) সুনীলা যে কাজ 5 ঘণ্টায় করে, শুভ্রা সে কাজ 9 ঘণ্টায় করে। উভয়ে একসঙ্গে কাজ করলে কাজটি করতে কত ঘণ্টা লাগবে?

17. করিম ও সুধীর একত্রে একটি দেয়াল 20 দিনে তৈরি করতে পারে। উভয়ে 12 দিন কাজ করার পর করিম একা অবশিষ্ট কাজ 10 দিনে শেষ করল। করিম ও সুধীর পৃথক ভাবে কাজ করলে প্রত্যেকে কত দিনে ঐ দেয়াল তৈরি করতে পারতো?

18. লাবণি, শ্রাবণী ও নন্দিনী একত্রে 5 ঘণ্টায় 75টি পুতুল তৈরি করতে পারে। তারা 75টি পুতুল তৈরি করার চুক্তি করে একসঙ্গে কাজ শুরু করল। 2 ঘণ্টা কাজ করার পর লাবণি চলে গেল। শ্রাবণী ও নন্দিনী $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা একসঙ্গে কাজ করে 15টি পুতুল তৈরি করল ও শ্রাবণী চলে গেল। নন্দিনী 5 ঘণ্টায় বাকি 30টি পুতুল তৈরি করল। লাবণি, শ্রাবণী ও নন্দিনী প্রত্যেকে 1 ঘণ্টায় কটা পুতুল তৈরি করতে পারবে?

19. বড়দা, মেজদা ও ছোড়দা একটি কাজ একত্রে 10 দিনে করতে পারেন। বড়দা একা 30 দিনে ও মেজদা 40 দিনে ঐ কাজটি করতে পারেন। ছোড়দা ঐ কাজটি কত দিনে করতে পারবেন?

20. 10 জন লোকের 25 দিনের খাদ্য মজুত আছে। 8 দিন পরে আরও 4 জন লোক এলেন। অবশিষ্ট খাদ্যে কত দিন চলবে ?

21. 4 জন লোকের 4 দিনের জন্য 4 কেজি চাল লাগে।

(i) 20 জন লোকের 20 কেজি চালে কত দিন চলবে ?

(ii) 20 জন লোকের 20 দিনের জন্য কত কেজি চাল দরকার ?

(iii) 20 কেজি চাল 20 দিনে কজন লোক খেতে পারবেন ?

22. 12 জন লোক 8 দিনে 144টি চেয়ার তৈরি করতে পারেন।

(i) কতজন লোক 10 দিনে 150টি চেয়ার তৈরি করবেন ?

(ii) 30 জন লোক 12 দিনে ক'টা চেয়ার তৈরি করবেন ?

(iii) 200 জন লোক কত দিনে 72টি চেয়ার তৈরি করবেন ?

23. অশোক কোন কাজের $\frac{4}{15}$ অংশ 36 দিনে করার পর অরবিন্দের সাহায্যে বাকি কাজ 33 দিনে শেষ করল। অশোক ও অরবিন্দ প্রত্যেকে পৃথকভাবে কাজটি কতদিনে সম্পন্ন করতে পারে ?

24. (*a*) ক একটি কাজ x দিনে, খ ঐ কাজটি y দিনে ও গ একই কাজ z দিনে করতে পারেন। দেখাও যে,

(i) ক ও খ একত্রে কাজটি $\frac{xy}{x+y}$ দিনে সম্পন্ন করতে পারেন।

(ii) ক ও গ একত্রে কাজটি $\frac{xz}{x+z}$ দিনে সম্পন্ন করতে পারেন।

(iii) খ ও গ একত্রে কাজটি $\frac{yz}{y+z}$ দিনে সম্পন্ন করতে পারেন।

(iv) ক, খ ও গ একত্রে কাজটি $\frac{xyz}{xy+yz+zx}$ দিনে সম্পন্ন করতে পারেন।

(*b*) নিচের প্রত্যেক সারিতে ক, খ ও গ পৃথকভাবে কোন্ কাজ কত দিনে করতে পারেন তা, যা অন্য প্রয়োজনীয় শর্ত দেওয়া আছে।

যথাযথ সূত্রে x, y ও zএর অনুরূপ সাংখ্যমান বসিয়ে অনুরূপ দিন সংখ্যা প্রত্যেক সারির শূন্যস্থানে বসাও :

কাজ	ক একা যতদিনে করতে পারেন	খ একা যতদিনে করতে পারেন	গ একা যতদিনে করতে পারেন	ক ও খ একত্রে যতদিনে করতে পারেন	ক ও গ একত্রে যতদিনে করতে পারেন	খ ও গ একত্রে যতদিনে করতে পারেন	ক, খ ও গ একত্রে যতদিনে করতে পারেন
১ম কাজ	5	7	8				
২য় কাজ	10	12	6				
৩য় কাজ	4		8			4	
৪র্থ কাজ	3	5				4	

প্রত্যেক ক্ষেত্রে পাটীগণিতের নিয়মে কষে শূন্যস্থানগুলির উত্তরের সত্যতা যাচাই কর।

25. 12 জন লোক একটি কাজ 4 দিনে করতে পারেন৷ কতজন লোক এর 8 গুণ একটি কাজ অর্ধেক সময়ে করতে পারবেন?

26. 50 জন লোক একটি কাজ 50 দিনে করতে পারেন৷ যদি কাজটি 50 জন লোক শুরু করেন এবং 10 জন লোক প্রত্যেক দশম দিনের শেষে চলে যান, তবে কাজটির কত অংশ সকলে চলে যাওয়ার পরেও বাকি থাকবে ?

27. প্রথম ও দ্বিতীয় নল দিয়ে যথাক্রমে 30 মিনিটে ও 40 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়। দুটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে কত সময়ে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হবে ?

28. একটি স্নানাগারের চৌবাচ্চায় দুটি নল আছে। প্রথম নলটি দিয়ে 2 ঘণ্টায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়। দ্বিতীয় নলটি দিয়ে 3 ঘণ্টায় জলপূর্ণ চৌবাচ্চাটি খালি হয় ?

(i) সম্পূর্ণ খালি অবস্থায় দুটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে কত সময়ে চৌবাচ্চাটি জলপূর্ণ হবে ?

(ii) চৌবাচ্চাটি সম্পূর্ণ খালি অবস্থায় প্রথম নলটি খুলে দেওয়ার 15 মিনিট পরে যদি দ্বিতীয় নলটি খুলে দেওয়া হয়, তবে আর কত সময় পরে চৌবাচ্চাটি জলপূর্ণ হবে ?

29. প্রথম নল দিয়ে একটি খালি জলাধার 40 মিনিটে পূর্ণ হয় ও দ্বিতীয় নল দিয়ে জলপূর্ণ জলাধারটি 30 মিনিটে খালি হয়।

(i) জলপূর্ণ অবস্থায় দুটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে কত সময় পরে জলাধারটি জলশূন্য হবে ?

(ii) জলপূর্ণ অবস্থায় দ্বিতীয় নল খোলার 5 মিনিট পর প্রথম নল খুললে জলাধারটি খালি হতে কত সময় লাগবে ?

30. একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। প্রথম ও দ্বিতীয় নল দিয়ে খালি চৌবাচ্চা পৃথকভাবে যথাক্রমে 3 ঘণ্টা ও 4 ঘণ্টায় জলপূর্ণ হয়। তৃতীয় নল দিয়ে 5 ঘণ্টায় জলপূর্ণ চৌবাচ্চাটি খালি হয়। তিনটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে কত সময়ে জলশূন্য চৌবাচ্চা জলপূর্ণ হবে ?

পাটীগণিত

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1(ক)

1. $\frac{1}{8}$, $1\frac{1}{40}$, $\frac{16}{3125}$, $10\frac{31}{250}$, $\frac{1}{160}$, $\frac{5}{16}$, 7, $5\frac{77}{125}$

2.(*a*) ·0101, ·0011, ·001, ·00098, ·0009 ; (*b*) ·51, $\frac{1}{2}$, ·499, $\frac{1}{3}$, ·299 (*c*) $\frac{\cdot1}{\cdot0001}$, $\frac{1}{\cdot01}$, $\frac{1}{\cdot1}$, $\frac{\cdot01}{2}$, $\frac{\cdot001}{5}$

3.(*a*) $\frac{9}{110}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{9}{1100}$, $2\frac{3}{370}$, $2\frac{12}{55}$; (*b*) $\frac{27}{3700}$, $3\frac{5333}{49950}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{35}$, $14\frac{131}{9990}$. 4.(*a*) $4\cdot66632\dot{1}$ (*b*) $\cdot00\dot{3}5\dot{2}$.

5.(*a*) 1·64 মিটার (*b*) 24·2 কিমি (*c*) 2·31 গ্যালন, 2 গ্যালন, ·31 গ্যালন কম।

প্রশ্নমালা 1(খ)

1.(*a*) গুণিতক (*b*) গুণনীয়ক (*c*) ল. সা. গু. (*d*) গুণিতক (*e*) ল. সা. গু., গ. সা. গু. (*f*) গুণফল।

2.(*a*) $1\frac{4}{5}$, $3\frac{3}{5}$ (*b*) 140, 280

3.(*a*) 4 (*b*) 144 (*c*) 60 (*d*) 64·5 (*e*) 37·5

4.(*a*) $1\frac{3}{4}$, (*b*) $\frac{1}{4}$, (*c*) $\frac{9}{160}$, (*d*) ·05, (*e*) ·12.

প্রশ্নমালা 1(গ)

1.(*a*) 5, (*b*) 1, 3, 7, 57 (*c*) 4 (*d*) 2 (*e*) 3

2.(*a*) 96, 315, 101, 807, 232 (*b*) 1001, 1092, 613, 325, 7564

3. অংক সংখ্যা—3, 5, 4 ; একক স্থানীয় অঙ্ক—3 বা 7, 3 বা 7, 2 বা 8 4. 28 5. 99856, 10000 6. 13 জন

7. 29 সারি, 35 জন 8. 23 9 60 সারি, 102 জন

10. 25, 100.

প্রশ্নমালা 1(ঘ)

1. $21\frac{1}{19}$ সেকেন্ডে, $21\frac{17}{23}$ সেকেন্ডে ; ঘণ্টায় 18 কিমি, ঘণ্টায় 17·1 কিমি, ঘণ্টায় 16·56 কিমি।

2. 18 মিনিট 45 সেকেন্ড 3. 1 ঘণ্টা 52 মিনিট 4. 1 44 কিমি

5. ঘণ্টায় $74\frac{2}{7}$ মিটার
6. $5\frac{19}{25}$ সেকেণ্ডে, $20\frac{4}{25}$ সেকেণ্ডে
7. 1231 কিমি
8. একই সংগে পেঁছিবে।

প্রশ্নমালা 1(ঙ)

1. 185·90 টাকা
2. 1937·50 টাকা
3. 6
4. $16\frac{2}{3}$
5. 25 বছরে
6. $2\frac{1}{2}$ বছরে
7. 8 বছর 5 মাস
8. 810 টাকা
9. 1090 টাকা
10. 700 টাকা
11. 8.

প্রশ্নমালা 1(চ)

1. 2 মিটার, 4 বর্গ মিটার (আসন্ন মানে)
2. 74·75 বর্গ মিটার, 168·19 টাকা
3. 27 টাকা
4. 16 মিটার, 8 মিটার
5. 10 মিটার, 40 মিটার
6. 516 বর্গ মিটার, 774 টাকা
7. 76·25 বর্গ মিটার, 323·75 বর্গ মিটার,
8. 13 বর্গ মিটার, 58·50 টাকা।

প্রশ্নমালা 2

1. 63
2. 16 গ্রাম
3. 4·75 কুইন্টাল
4. 145টি
5. 90টি
6. 87 জন
7. 196টি
8. 11 বছর
9. 24 রান
10. 14·3 বছর
11. 49টি
12. ·02 সেমি
13. 146·8 সেমি
14. 149টি
15. 75·4°
16. 132, 66, 33
17. 48 জন
18. 11 বছর
19. বিঘা প্রতি 1·1 কুইণ্টাল বেশী
20. 125টি যন্ত্রাংশ, 1500টি যন্ত্রাংশ
21. ক-490 টাকা, খ-520 টাকা, গ-550 টাকা
22. 16·54 সেমি
23. 3 বছর
24. 50 রান
25. উভয়ের একই গড়
26. ঘণ্টায় 40 কিমি।

প্রশ্নমালা 3

1. 515টি
2. 1·35 টাকা
3. 48 জন
4. 7·25 টাকা
5. 1·22 সেমি
6. মিনিটে 825 মিটার
7. 9·40 কুইণ্টাল
8. 45·25
9. 29°C

10. 105 জন 11. খ টিম—19 রান 12. 43 টাকা

13. অঙ্কে গড়ে 7 নম্বর বেশী 14. 157·2 সেমি

15. 14·48 বছর 16. 1·50 টাকা, 2·50 টাকা, 8·25 টাকা ; 122·50 টাকা।

প্রশ্নমালা 4

1. (i) $\frac{15}{16}$ (ii) $\frac{13}{23}$ (iii) $\frac{29}{30}$ (iv) $1\frac{8}{27}$ (v) $1\frac{1}{5}$ (vi) $2\frac{15}{26}$ (vii) $\frac{89}{96}$ (viii) $\frac{116}{225}$ (ix) $\frac{64}{73}$ (x) $1\frac{15}{71}$ (xi) $3\frac{23}{24}$ (xii) $9\frac{1}{13}$ (xiii) $10\frac{13}{27}$ (xiv) $\frac{65}{357}$ (xv) $3\frac{60}{79}$ (xvi) $\frac{83}{105}$ (xvii) $\frac{1705}{1781}$ (xviii) $12\frac{136}{173}$ (xix) $\frac{1487}{5480}$ (xx) $160\frac{3}{4}$

2. $2\frac{3}{23}$ 3. $\frac{11}{16}$ অংশ 4. $1\frac{1}{3}$ 5. 3 6. $1\frac{1}{11}$ 7. 16 গুণ।

প্রশ্নমালা 5

1. (i) ·7 (ii) ·12 (iii) ·09 (iv) ·56 (v) ·87 (vi) ·94 (vii) 3·5 (viii) 5·7 (ix) 7·42 (x) 1·86 (xi) ·013 (xii) ·225 (xiii) 11·02 (xiv) 13·66 (xv) 8·729 (xvi) 16·54 (xvii) 86·42 (xviii) 27·95 2. ·08 3. 1·05.

4. 2·03 মিটার 5. 2·4 মিটার 6. ·25 7. 15·54 8. 18 সেমি।

প্রশ্নমালা 6

1. (i) 2·236 (ii) 2·646 (iii) 3·464 (iv) 6·083 (v) 9·274 (vi) 10·724 (vii) 16·031 (viii) 26·627 (ix) 33·660 (x) 71·099 (xi) 79·354 (xii) 95·021 (xiii) 107·345

2 (i) ·692 (ii) ·378 (iii) ·816 (iv) 2·299 (v) 2·987 (vi) ·861 (vii) ·914 (viii) 8·415 (ix) ·775 3. (i) ·63 (ii) 1·58 (iii) ·47 (iv) ·48 (v) ·45 (vi) 3·77 (vii) ·04 (viii) 3·24 (ix) 10·05 (x) 10·73 (xi) 16·70.

প্রশ্নমালা 7

1. 40 কিমি, ঘণ্টায় 15 কিমি 2. 53 মিনিট 20 সেকেণ্ডে

3. ঘণ্টায় 5 কিমি 4. ঘণ্টায় 12 কিমি 5. ঘণ্টায় 72 কিমি

6. 3 মিনিট 24 সেকেন্ড 7. 33 সেকেন্ড 8. 250 মিটার
9. 125 মিটার, ঘণ্টায় 45 কিমি 10. 250 মিটার, 150 মিটার ;
40 সেকেন্ডে 11. 2 মিনিট 15 সেকেন্ডে 12 21 সেকেন্ড
13. ঘণ্টায় 9 কিমি 14. 176 মিটার, ঘণ্টায় 79·2 কিমি
15. 65 মিটার, ঘণ্টায় 39·6 কিমি 16. $7\frac{1}{2}$ কিমি, 4 ঘণ্টা 12 মিনিটে।

প্রশ্নমালা 8

1. 4 ঘণ্টা, 42 কিমি 2. (i) দ্বিতীয়টি, 500 মিটার (ii) 4·5 কিমি (iii) 6 মিনিট 3. 5 ঘণ্টা 12 মিনিট পরে, 156 কিমি 4. দুপুর 12টা 24 মিনিটে, 11·520 কিমি 5. 90 কিমি 6. 20 সেকেন্ড পরে 7. 1 মিনিটে 8. 20 মিনিট পরে 9. খ-তে 10. সেকেন্ডে 4·9 মিটার 11. 1 কিমি, ঘণ্টায় 12 কিমি 12. সেকেন্ডে 6 মিটার 13. 28 মিনিট 14. ঘণ্টায় 18·04 কিমি (প্রায়) 15. 2 মিনিট 30 সেকেন্ড পরে, 150 মিটার 16. ক ফিরে আসার পথে 6 সেকেন্ড পরে, যেখানে শুরু হয়েছিল সেখান থেকে 450 মিটার দূরে 17. ঘণ্টায় 4 কিমি 18. ঘণ্টায় 48 কিমি 19. 14·4 সেকেন্ডে।

প্রশ্নমালা 9

1. (i) $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা (ii) 5 ঘণ্টা 2. (i) 40 কিমি, 51 কিমি 3. ঘণ্টায় 2 কিমি 4. ঘণ্টায় 7 কিমি 5. 11 ঘণ্টা 6. 24 কিমি 7. ঘণ্টায় 8 কিমি 8. ঘণ্টায় 7 কিমি, ঘণ্টায় 2 কিমি 9. 5 ঘণ্টা 10. 4 ঘণ্টা 11. ঘণ্টায় 5 কিমি 12. ঘণ্টায় 5 কিমি, ঘণ্টায় 5·8 কিমি 13. 1 ঘণ্টা 15 মিনিট 14. ঘণ্টায় 7·5 কিমি 15. 3টা 30 মিনিটে 16. 120 কিমি 17. 2 ঘণ্টা বেশী সময়, একই সময় 18. খ নৌকার 2 ঘণ্টা বেশী।

প্রশ্নমালা 10

1. 253 মিটার	2. 25 দিন	3. 3 দিন	4. 28 জন
5. 210 টি	6. 6 দিন	7. 7 জন	8. 8 ঘণ্টা ধরে
9. 290 মিটার	10. 80 জন	11. 4 জন	12. 12 দিন
13. 24 দিন	14. 16 দিন	15. 2 টি	16. 5 জন
17 15 জন	18. 270 জন	19. 120 জন	20. 48 দিনে
21. 30 দিনে	22. 156 জন।		

প্রশ্নমালা 11

1. $5\frac{5}{11}$ ঘণ্টা 2. $2\frac{2}{3}$ দিনে 3. $13\frac{1}{3}$ ঘণ্টায়
4. $6\frac{6}{13}$ ঘণ্টায় 5. 11 ঘণ্টা 6. $\frac{1}{2}$ অংশ
7. $8\frac{4}{5}$ দিনে, $10\frac{10}{11}$ দিনে, $9\frac{1}{3}$ দিনে 8. 10 দিনে, ক—30 দিনে, খ—20 দিনে, গ—60 দিনে 9. $1\frac{1}{3}$ দিনে 10. 26 দিনে
11. 24 দিনে 12. 20 দিনে 13. 9 জন 14. 14 দিনে
15. পুরুষ 12 দিনে, স্ত্রীলোক 18 দিনে, বালক 36 দিনে 16. 6 ঘণ্টায়
17. 12 দিনে 18. 5 দিনে 19. 1 দিনে 20. $5\frac{1}{4}$ দিনে
21. ক—30 দিনে, খ—30 দিনে 22. 8 দিনে 23. $7\frac{1}{2}$ ঘণ্টায়
24. 7 দিন।

প্রশ্নমালা 12

1. $6\frac{2}{3}$ মিনিটে 2. 6 মিনিটে 3. 36 মিনিটে
4. 40 মিনিটে 5. $14\frac{2}{3}$ মিনিটে 6. 28 মিনিটে
7. $16\frac{4}{5}$ মিনিটে 8. 45 মিনিটে 9. 70 মিনিটে
10. $45\frac{5}{11}$ মিনিটে 11. 3 ঘণ্টা 20 মিনিটে 12. 7টা 24 মিনিটে।

বিবিধ প্রশ্নমালা 1

1. (i) 8 (ii) 65 (iii) 11 (iv) 14 (v) 4 (vi) 64 পয়সা (vii) 26 সেমি (viii) 4 2. 53·62 কেজি
3. 124·9 সেমি 4. 130·50 টাকা, 3·17 টাকা 5. 711 টাকা
6. ঘণ্টায় 30 কিমি 7. 26·81 টাকা 8. 62, 60
9. 44·15 টাকা 10. 12·50 টাকা 11. 8·99 টাকা
12. 44·8 13. 76·67, 77 14. 65, 25, 58; কপিলদেবের
15. 45 কিমি 16. 4991 টাকা
17. 16 বছর 8 মাস 18. 25·58 টাকা 19 2·625 কেজি
20. 501·67 টাকা 21. 3·65 সেমি 22. ঘণ্টায় 6·4 কিমি
23. ঘণ্টায় 72 কিমি 24. 75·25; 105·2, 56·83, 77·2
25. 10 বছর $9\frac{3}{5}$ মাস 26. 7841 জন 27. 39 কিমি, ঘণ্টায় $7\frac{1}{17}$ কিমি 28. 1025 টাকা 29. গড় আয় 425·19 টাকা, গড় ব্যয় 348·40 টাকা, গড় সঞ্চয় 76·79 টাকা 30. 30700, 33530
31. 4·31 টাকা।

32. (i)

	ইংরাজী	গণিত	ইতিহাস	মোট নম্বর
ছাত্রদের নম্বরের গড়	37·17	56·5	39·5	133·17
ছাত্রীদের নম্বরের গড়	44	64·25	62·25	170·5
ছাত্র-ছাত্রীদের নম্বরের গড়	39·9	59·6	48·6	148·1

(ii)

	দেবু	শুভ	জন	রুমা	রিঙ্কু	চন্দ্রা
ইংরেজী	ভাল	দুর্বল	ভাল	দুর্বল	ভাল	দুর্বল
গণিত	দুর্বল	ভাল	ভাল	দুর্বল	ভাল	ভাল
ইতিহাস	ভাল	দুর্বল	দুর্বল	দুর্বল	দুর্বল	ভাল
সমগ্র বিষয়	ভাল	দুর্বল	ভাল	দুর্বল	ভাল	ভাল

33. 550 গ্রাম 34. 3·92 টাকা 35. 77·5 সেমি
36. 3544·75 37. (1) 176·67 (2) 210 (3) 143·33
38. (i) 9 (ii) 4 39. (i) 44·63 কেজি (ii) 1·41 মিটার
40. (i) (*a*) 16টি (*b*) 800 গ্রাম (ii) 1·03 টাকা ; 6·43 পয়সা, 50 গ্রাম 41. প্রথম দল : উচ্চতা—1·53 মিটার, ওজন—35·06 কেজি, পরীক্ষায় নম্বর—406·86 ; দ্বিতীয় দল : উচ্চতা—1·43 মিটার, ওজন—42·25 কেজি, পরীক্ষায় নম্বর—417·5, নতুন দল : উচ্চতা—1·48 মিটার, ওজন—38·38 কেজি, পরীক্ষায় নম্বর—411·77.

বিবিধ প্রশ্নমালা 2

1. (i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $\frac{7}{8}$ (iv) $\frac{1}{15}$ (v) $2\frac{1}{2}$ (vi) $2\frac{3}{4}$ (vii) ·9 (viii) ·3 (ix) ·1 (x) ·01 (xi) ·07 (xii) ·001

2. (i) $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{25}}$ (ii) $\sqrt{\frac{36}{25}}$, $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (iii) $\sqrt{\frac{6}{25}}$, $\sqrt{\frac{4}{25}}$ (iv) $\sqrt{\frac{36}{49}}$, $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (v) $\frac{\sqrt{89}}{10}$, $\frac{9}{11}$ (vi) $\sqrt{2\frac{7}{25}}$, $\sqrt{\frac{121}{169}}$

(vii) $\sqrt{\cdot 01}$, $\sqrt{\cdot 000001}$ (viii) $\sqrt{\cdot 09}$, $\sqrt{\cdot 0004}$ (ix) $\sqrt{\cdot 7}$, $\sqrt{\cdot 012}$ (x) $\sqrt{3}$ $\sqrt{\cdot 81}$ (xi) $\sqrt{\cdot 09}$, $(\cdot 09)^2$ (xii) $\sqrt{5}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 3 (i) 25 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 20 মিটার, 10 মিটার (v) ·2, ·1 4. (*a*) $1\frac{9}{10}$, $2\frac{1}{5}$, $16\frac{1}{2}$, $\frac{39}{64}$, $\frac{97}{125}$ (*b*) 8·4, 12·3, 123·4, $\frac{13}{15}$, ·226 (*c*) $1\frac{1}{13}$, ·018, 3·9, 32·9, ·0231 (*d*) 1·414, 1·732, 2·236, 2·646, 3 317 (*e*) ·95, ·04, ·03, 4·81, 3·95 (*f*) ·63, ·65, ·74, 1·10, 11·45 (*g*) 77. ·89, ·97, 1·84, ·71 5. 1·322

6. $\frac{5}{158}$ 7. 253, 2·53 টাকা 8. 214 9. 122·47 মিটার

10. 84 মিটার, 56 মিটার 11. 7·5 মিটার, 2·5 মিটার 12. 2 কিমি, 800 মিটার 13. 5 14. 12 ডেসিমি, 144 বর্গ ডেসিমি

15. 70 মিটার 16. 2·75 17. 7·07 সেমি 18. 16, 4

19. (*a*) 3 সেমি (*b*) 2 (*c*) 7 (*d*) 21 (*e*) 13 (*f*) 6 বর্গ সেমি (*g*) 84 বর্গ সেমি (*h*) 9.

বিবিধ প্রশ্নমালা 3

1. (*a*) সত্য (*b*) মিথ্যা (*c*) মিথ্যা (*d*) মিথ্যা (*e*) মিথ্যা (*f*) সত্য (*g*) সত্য (*h*) মিথ্যা (*i*) সত্য (*j*) সত্য (*k*) মিথ্যা (*l*) মিথ্যা 2. (*a*) 3 কিমি (*b*) 416·67 মিটার (*c*) 5 মিটার (*d*) 4 কিমি (*e*) 39 কিমি (*f*) 12 সেকেণ্ডে, 36 সেকেণ্ডে (*g*) 36 সেকেণ্ডে, 12 সেকেণ্ডে 3. 6 মিনিট, 1 ঘণ্টা, 30 সেকেণ্ড, 1 কিমি, $16\frac{2}{3}$ মিটার, 720 কিমি, 3·6 কিমি, 180 মিটার, 25 সেমি 4. 1155 মিটার 5. 5·16 কিমি 6. $28\frac{1}{8}$ মিটার

7. 5 সেকেণ্ড 8. 50·4 কিমি 9. 75 মিটার 10. 8·4 সেকেণ্ডে

11. (*a*) 3 মিনিটে (*b*) $4\frac{1}{2}$ মিনিটে 12 230 মিটার, 2·99 কিমি

13 9 টা 50 মিনিটে 14. ঘণ্টায় 25 কিমি 15. $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে

16 180 মিটার 17 8 ঘণ্টা, 200 কিমি 18. 16·8 মিনিটে, অমল 1820 মিটার, অসিত 1120 মিটার 19. $15\frac{3}{7}$ কিমি

20. ঘণ্টায় 5·5 কিমি, ঘণ্টায় 1·5 কিমি 21. ঘণ্টায় 88·2 কিমি, ঘণ্টায় 63 কিমি 22 $11\frac{5}{11}$ কিমি 23. ঘণ্টায় $3\frac{1}{3}$ কিমি,

ঘণ্টায় $1\frac{2}{3}$ কিমি 24. 12 বার, 28·8 কিমি 25. (i) (a) 10টা 38 মিনিট 20 সেকেণ্ডে (b) 10 টা 38 মিনিট 26 সেকেণ্ডে (c) 10টা 38 মিনিট 25 সেকেণ্ডে (d) 10 টা 38 মিনিট 31 সেকেণ্ডে (e) 10টা 39 মিনিট 21 সেকেণ্ডে (ii) (b) 10 টা 30 সেকেণ্ডে (c) সাক্ষাৎ হবে না (d) যাত্রার শুরুতে (e) 10 টা 5 মিনিট 30 সেকেণ্ডে 26. 24 সেকেণ্ড ।

বিবিধ প্রশ্নমালা 4

1. (a) 5 দিনে (b) 1 দিনে (c) 3 দিনে (d) 1 জনে (e) 2 জনে (f) 5 জন (g) 1 জন (h) কম দিন 2. (a) $5\frac{5}{11}$ দিনে (b) $1\frac{9}{11}$ দিনে (c) $3\frac{1}{3}$ দিনে (d) $3\frac{9}{37}$ দিনে (e) $\frac{1}{36}$ অংশ, 36 দিনে (f) $27\frac{3}{11}$ দিনে (g) 3 দিনে, 3 দিনে 3. 8 দিনে 4. 16 হেক্টর 5. $8\frac{8}{9}$ ঘণ্টা 6. 35 দিনে 7. $3\frac{57}{133}$ কুইণ্টাল 8. 50 জন 9. $16\frac{2}{3}$ একর 10. 150 জনে 11. 6 ঘণ্টায় 12. (i) $16\frac{4}{11}$ দিনে, লতিফ $1\frac{7}{11}$ একর, মহিম $1\frac{4}{11}$ একর (ii) 15 দিনে 13. 500 জন 14. $14\frac{2}{7}$ দিনে 15. 256 লাইন 16. (a) 6 দিনে (b) $\frac{xy}{x+y}$ দিনে (c) $4\frac{4}{9}$ দিনে (d) $3\frac{3}{14}$ ঘণ্টায় 17. করিম 25 দিনে, সুধীর 100 দিনে 18. লারণি 5টি, শ্রাবণী 4টি, নন্দিনী 6টি 19. 24 দিনে 20. $12\frac{1}{7}$ দিনে 21. (i) 4 দিনে (ii) 100 কেজি (iii) 4 জন 22 (i) 10 জন (ii) 540টি (iii) $\frac{6}{25}$ দিনে 23. অশোক 135 দিনে, অরবিন্দ $67\frac{1}{2}$ দিনে 24. (b) প্রথম কাজ—$2\frac{1}{12}$ দিনে $3\frac{1}{13}$ দিনে, $3\frac{11}{15}$ দিনে, $2\frac{18}{31}$ দিনে ; দ্বিতীয় কাজ—$5\frac{5}{11}$ দিনে, $3\frac{3}{4}$ দিনে, 4 দিনে, $2\frac{6}{7}$ দিনে ; তৃতীয় কাজ—8 দিনে, $2\frac{2}{3}$ দিনে, $2\frac{2}{9}$ দিনে, 2 দিনে ; চতুর্থ কাজ—20 দিনে, $1\frac{7}{8}$ দিনে, $2\frac{14}{23}$ দিনে, $1\frac{5}{7}$ দিনে 25. 192 জন 26. $\frac{2}{5}$ অংশ 27. $17\frac{1}{7}$ মিনিটে 28. (i) 6 ঘণ্টায় (ii) 5 ঘণ্টা 15 মিনিট পরে 29. (i) 2 ঘণ্টা পরে (ii) 1 ঘণ্টা 40 মিনিট 30. $2\frac{14}{23}$ ঘণ্টায় ।

বীজগণিত

তালিকা

প্রথম অধ্যায়

পূর্বপাঠের অনুশীলনী

প্রশ্নমালা 1

1. চিহ্নের সাহায্যে লেখ ঃ

(i) p ও q-এর সমষ্টি (ii) a থেকে 5 কম (iii) b-এর 10 গুণ (iv) x-এর 3 গুণ অপেক্ষা 5 বেশী (v) a ও b-এর সমষ্টি থেকে 7 বেশী (vi) a ও b-এর সমষ্টি বিভক্ত c (vii) p থেকে q কম।

2. কথায় লেখ ঃ

(i) $x-y$ (ii) $p+q$ (iii) $4m$ (iv) $\frac{a}{b}$ (v) $p+3q$ (vi) $\frac{a}{2}+b$

3. তোমার কাছে xটি রঙ পেন্‌সিল আছে। তা থেকে তোমার ভাইকে yটি পেন্‌সিল দিলে, তোমার ক'টি পেন্‌সিল রইল ?

4. মাধববাবুর বয়স এখন 65 বছর। (i) x বছর পূর্বে তাঁর বয়স কত ছিল ? (ii) y বছর পরে তাঁর বয়স কত হবে ?

5. a মিটার b সেণ্টিমিটারে কত মিলিমিটার ?

6. দুটি সংখ্যার সমষ্টি x, একটি y হলে অপরটি কত ?

7. বিদ্যালয়ের প্রতিষ্ঠা দিবস উপলক্ষে দুঃস্থদের সাহায্যের জন্য বিদ্যালয়ের ছাত্রেরা মোট 250 টাকা চাঁদা তুলল। তা থেকে x টাকার জামা কাপড় ক্রয় করে অবশিষ্ট টাকা y সংখ্যক দুঃস্থকে সমানভাবে ভাগ করে দেওয়া হল। প্রত্যেকে কত টাকা পাবে নির্ণয় কর।

8. A-র থেকে B-র দূরত্ব x কিলোমিটার। ঘণ্টায় y কিলোমিটার বেগে কোন ট্রেন A থেকে যাত্রা করে কতক্ষণ পর B-তে পেঁছবে ?

9. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার এককের অঙ্ক x এবং দশকের অঙ্ক 3 ; সংখ্যাটি কত ? এককের অঙ্ক 3 এবং দশকের অঙ্ক x হলে সংখ্যাটি কত হবে ? এককের অঙ্ক x ও দশকের অঙ্ক y হলে সংখ্যাটি কত হবে ?

10. তুমি তোমার ভাইয়ের থেকে x-বছরের বড়। আবার তোমার দিদি তোমার থেকে y বছরের বড়। তোমার বয়স এখন 12 বছর হলে, তোমার ভাই ও তোমার দিদির বর্তমান বয়স কত ? তোমার বয়স যখন তোমার দিদির বর্তমান বয়সের সমান হবে, তখন তোমার ভাইয়ের ও তোমার দিদির বয়স কত হবে ?

প্রশ্নমালা 2

$a=3,\ b=4,\ c=2,\ d=1,\ x=5,\ y=0$ হলে নিচের রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

1. $a+2b+3c+4d$
2. $7a-4x-4y+2c-3b$
3. $a\times b-c$
4. $b\div c-d$
5. $7a\times b\div 6c\times d$
6. $5a-\frac{cd}{2}+\frac{abc}{3}$
7. $\frac{2a+5b}{5c}+\frac{3d-4a}{a+b-c}$
8. $3bcx-10acx+3abx$
9. $ax+by+cd\div ab$
10. $4\times\frac{a-b}{c}+3\times\frac{b-c}{d}-6\times\frac{c-d}{a}$

প্রশ্নমালা 3

1. নিচের উক্তিগুলি কি বুঝায় ?

(i) -15 টাকা লাভ
(ii) -20 কিমি নিচে নামা
(iii) -10 মিটার উত্তর দিকে
(iv) -10°C উষ্ণতা বৃদ্ধি

2. শূন্যস্থান পূরণ কর :

(i) 10 টাকা ক্ষতি $=\cdots$ লাভ $=-10$ টাকা…
(ii) -5 কিমি দক্ষিণে $=\cdots$ উত্তরে $=5$ কিমি…
(iii) 15 কিমি উপরে ওঠা $=\cdots$ নিচে নামা $=-15$ কিমি…
(iv) -5° উষ্ণতা হ্রাস $=\cdots$ উষ্ণতা বৃদ্ধি $=5^{\circ}$ উষ্ণতা…

3. নিচের সংখ্যাগুলিকে ছোট থেকে বড় ক্রমে সাজাও :

(i) $0, 1, -3, 4, -8$
(ii) $-5, 0, -1, -9, -7$
(iii) $3, -2, 6, -4, 8$
(iv) $1, -1, -3, -5$
(v) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{2}, \frac{9}{4}$
(vi) $-1, \frac{3}{2}, 3, -\frac{2}{3}, \frac{5}{2}, -4$

4. $x=2, y=-1, z=3$ হলে
(i) $x^2+y^2+z^2$ এবং (ii) $x^3+y^3+z^3$ এর মান নির্ণয় কর।

5. $a\times b-c$ রাশিটি কি $a\times(b-c)$ রাশিটির সমান ?
$a=3, b=4, c=2$ ধরে উত্তরটি পরীক্ষা করে দেখ।

6. সরল কর :

(i) $3a-4b-(3b+a)-(5a-8b)$

(ii) $-2-[-2-\{-2-(-2-2)\}]$

(iii) $a-[-a-\{-a-(-a)\}]$

(iv) $1-[1-\{1-(1-\overline{1-x})\}]$

7. $a=3$; $b=2$ হলে দেখাও যে,

(i) $\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$ (ii) $\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$

8. $a=1, b=2, c=3$ হলে দেখাও যে,

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

9. কোন হোটেলে প্রথম 2 দিন থাকার জন্য প্রতিদিন a টাকা হিসাবে এবং পরবর্তী প্রতিদিনের জন্য b টাকা হিসাবে ভাড়া ধার্য করা হয়। c দিনের জন্য মোট কত টাকা লাগবে ? (ধরে নাও $c>2$)

10. শূন্যস্থান পূরণ কর :

(i) $a+3b-3c=a+3(\cdots\cdots)$

(ii) $x-2y+2z=x-2(\cdots\cdots)$

(iii) $a-b+c-d=a-(\cdots\cdots)$

প্রশ্নমালা 4

1. যোগ কর :

(i) $a^2, 2b^2, 3c^2$ (ii) $x^2y, 3x^2y, -4x^2y$

(iii) $5a^2-2a+4, -3a^2+3a+1, 7a^2-a, -2a+3$

2. সরল কর :

(i) $5x+(-3x)+8y+(-6y)+7z+(-3z)$

(ii) $(a-b)+(b-c)+(c-a)+(a+b+c)$

(iii) $(p^2+3pq+2q^2)+(-2pq+q^2-2p^2)+(4q^2+p^2-pq)$

3. বিয়োগ কর :

(i) $2a-3b+c$ থেকে $a+b+c$

(ii) $8x^2-3y^2+4z^2$ থেকে $4x^2-2y^2-z^2$

(iii) $4m^2-3mn+n^2$ থেকে m^2+n^2

4. গুণ কর :

(i) $8x^3, -2y^2, z^2$ (ii) $a^2b, -2ab^2, 4ab$

(iii) $-\frac{5}{3}ab^2, -\frac{2}{3}a^3c^3, -3ca^2$

5. গুণ কর :

(i) $3x^2-5x$ কে $x+1$ দিয়ে

(ii) b^2-c^2 কে b^2+c^2 দিয়ে

(iii) $yz+zx$ কে $x-y$ দিয়ে

6. সরল কর :

(i) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$

(ii) $(y-z)(y+z)+(z-x)(z+x)+(x-y)(x+y)$.

7. $x=al-m$, $y=bm-n$, $z=cn-l$ হলে, $x(l+m)+y(m+n)+z(n+l)$-কে সরল কর।

$a=b=c=1$ হলে, রাশিটির মান কত হবে?

8. ভাগ কর :

(i) $12a^3b^2-15a^2b^3+9ab$-কে $3ab$ দিয়ে

(ii) $36x^3y^2-24x^3y^5-20x^4y^2$-কে $4x^2y$ দিয়ে

(iii) $3pqr+12p^2qr^2-9p^3q^2r^2$-কে $-3pqr$ দিয়ে

(iv) $30m^2n^3+40m^3n^4-50m^4n^5$-কে $10m^2n^2$ দিয়ে।

প্রশ্নমালা 5

1. নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

(i) $4x+3y$ (ii) $8a-4b$ (iii) $xy+c$

(iv) $4x-abc$ (v) $x+y+2$ (vi) $2a+3b-5c$

(vii) $x+y+zp$ (vii) $a+b-c-1$

(ix) $1+2x+2y+3z$ (x) $m+2n-3p+4q$.

2. সরল কর :

(i) $(3a+5b)^2+2(3a+5b)(2a-5b)+(2a-5b)^2$

(ii) $(3x-2y+z)^2-2(3x-2y+z)(x-2y+z)+(x-2y+z)^2$.

3. পূর্ণ বর্গাকারে প্রকাশ কর :

(i) $16a^2+8a+1$ (ii) $36x^2-84xy+49y^2$

(iii) $1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}$ (iv) $4x^2+\frac{9}{16y^2}-\frac{3x}{y}$.

4. পূর্ণ বর্গাকারে প্রকাশ করে মান নির্ণয় কর :

(i) $5·71\times5·71+2\times5·71\times4·29+4·29\times4·29$,

(ii) $6·47\times6·47-2\times6·47\times3·47+3·47\times3·47$

(iii) $36x^2+132xy+121y^2$, যখন $x=8$, $y=-5$

(iv) $x^2y^2-10xyz+25z^2$, যখন $x=1$, $y=-2$, $z=3$.

5. $x-y=3$, $xy=28$ হলে, x^2+y^2-এর মান কত ?

6. $x+\frac{1}{x}=4$ হলে, দেখাও যে (i) $x^2+\frac{1}{x^2}=14$

(ii) $x^4+\frac{1}{x^4}=194$.

7. $m+\frac{1}{m}=-5$ হলে, দেখাও যে, $m^2+\frac{1}{m^2}=23$.

8. $m-\frac{1}{m}=p$ হলে, প্রমাণ কর (i) $m^2+\frac{1}{m^2}=p^2+2$

(ii) $\left(m+\frac{1}{m}\right)^2=p^2+4$.

9. $a+b=5$, $a-b=1$ হলে, $8ab(a^2+b^2)$-এর মান কত হবে ?

10. (i) $4x^2+16$-এর সঙ্গে x সম্বলিত কোন্ রাশি যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গরাশি হবে ?

(ii) $16a^2+25b^2$ থেকে ab সম্বলিত কোন্ রাশি বিয়োগ করলে বিয়োগফল পূর্ণবর্গরাশি হবে ?

প্রশ্নমালা 6

1. সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

(i) $(a+6)(a-6)$ (ii) $(6a+5b)(6a-5b)$

(iii) $(ac+bd)(ac-bd)$ (iv) $(4xy+5pq)(4xy-5pq)$

(v) $(2m+n+p)(2m+n-p)$ (vi) $(a+2b+3c)(a+2b-3c)$

(vii) $(2x-y+3z)(2x+y+3z)$.

2. সূত্রের সাহায্যে গুণ কর :

(i) 1002×998 (ii) 1511×1489 (iii) 556×544.

3. সূত্রের সাহায্যে সরল কর ঃ

(i) $(a+2b-3c)^2-(a+2b+3c)^2$

(ii) $(4x+5y+3z)^2-(3x-2y+3z)^2$

(iii) $4533\times4533-4531\times4531$

(iv) $(757{\cdot}71)^2-(242{\cdot}29)^2$.

4. দুটি রাশির গুণফলরূপে প্রকাশ কর ঃ

(i) $81a^2-49$ (ii) $121m^2-169n^2$

(iii) $(3x+4y)^2-(2x-y)^2$ (iv) $a^2+2ab+b^2-1$

(v) $x^2-9-4xy+4y^2$.

5. দুটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর ঃ

(i) 983×17 (ii) 541×409

(iii) $(2a+3b)(3a+b)$ (iv) $(4x+3y)(2x-3y)$.

6. সূত্রের সাহায্যে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ

(i) $4-25a^2$ (ii) x^2y^2-1 (iii) $a^2b^2-c^2d^2$

(iv) $25m^2-49n^2$ (v) $(a+b)^2-16$

(vi) $(4x+3y)^2-(3x-2y)^2$ (vii) $64ax^2-49a(x-2y)^2$

(viii) $(x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2$

(ix) $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$ (x) $x^2+y^2+2xy-z^2$

(xi) $16x^2-4a^2+12ab-9b^2$. (xii) $a^2-b^2-2ac+2bc$

(xiii) x^2-2x-y^2+2y (xiv) $2mn-m^2-n^2+p^2$

(xv) $(a^2-b^2-c^2+d^2)^2-4(ad-bc)^2$

(xvi) $c+bc^2-ba^2-a$ (xvii) $2+a-a^2$.

প্রশ্নমালা 7

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর ঃ

1. $3x=0$ 2. $52x=39$ 3. $11x=-121$

4. $8x+5x-2x=17-9+33+3$

5. $6+7x-4x=5x+10$ 6. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}x=3\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x$

7. $3x+4+10x-17=14-23x+16-7x$

8. $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{5}+1\frac{1}{3}$ 9. $\frac{x}{3}+1\frac{1}{3}=\frac{2x}{9}-\frac{x}{6}+4$

10. $5x-3(2x-1)=3(6-x)-1.$

11. $4(3+x)-3(2x-5)=6-x-2(3-x).$

12. $2x-5\{7-(x-6)+3x\}-28=39.$

13. $20(7x+4)-18(3x+4)-5=25(x+5)$

14. $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x-2}{4}=\frac{5x-4}{6}-\frac{7x+6}{12}.$

15. $13-\frac{9-x}{11}=\frac{3x}{22}+12\frac{1}{2}.$

16. $\frac{1}{3}(x+1)+\frac{1}{4}(x+3)=\frac{1}{5}(x+4)+16.$

17. $x-\frac{x-1}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x-}{3}-\frac{x-2}{4}+\frac{x-3}{5}$

18. তোমার বর্তমান বয়স তোমার ছোট ভাইয়ের বয়সের চেয়ে 8 বছর বেশী। 4 বছর পর তোমার বয়স তোমার ছোট ভাইয়ের বয়সের দ্বিগুণ হবে। সমীকরণের সাহায্যে তোমার বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

19. তুমি বাজারে গিয়ে 2 টাকা কিলো দরে 2 কিলো আলু, 2·50 টাকা কিলো দরে 2 কিলো আটা, 3 টাকা কিলো দরে কিছু চাল কিনলে। তোমার মোট 24 টাকা খরচ হল। চালের পরিমাণ নির্ণয়ের জন্য একটি সমীকরণ গঠন কর এবং সমাধান কর।

20. নাসিফা, সুলেমা ও মন্দিরা একটি পরীক্ষায় গণিতে মোট 162 নম্বর পেল। নাসিফা, সুলেমা অপেক্ষা 8 নম্বর বেশী পেল এবং সুলেমা, মন্দিরা অপেক্ষা 10 নম্বর কম পেল। এদের প্রাপ্ত নম্বর নির্ণয়ের জন্য একটি সমীকরণ গঠন কর এবং সমাধান কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

বহুপদ রাশির গুণ ও ভাগ

বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দিয়ে গুণ ঃ

তোমরা সপ্তম শ্রেণীতে একটি দ্বিপদরাশিকে অপর একটি দ্বিপদরাশি দিয়ে কি ভাবে গুণ করতে হয়, তা শিখেছ। একটি বহুপদরাশিকে অপর একটি বহুপদ-রাশি দিয়ে কি ভাবে গুণ করতে হয়, এই অধ্যায়ে তাই আলোচনা হবে। এ ক্ষেত্রেও গুণের মূল নিয়ম একই। তবে সাধারণতঃ একটি বহুপদ রাশিকে অপর একটি বহুপদ রাশি দিয়ে গুণ করার সময় গুণ্য (যে রাশিকে গুণ করা হবে) ও গুণক (যে রাশি দিয়ে গুণ করা হবে) উভয় বহুপদ রাশিকেই সুবিধামত সাজিয়ে নিতে হয়।

এক বা একাধিক অক্ষরের বিভিন্ন ঘাতযুক্ত বহুপদবিশিষ্ট রাশিকে প্রথমতঃ একই অক্ষরের ঘাতের উর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে সাজিয়ে নিতে হবে। তারপর গুণ্য রাশিটিকে উপরে এবং তার নিচে গুণক রাশিটিকে লিখে (অর্থাৎ পাটীগণিতের ন্যায় স্তম্ভে সাজিয়ে) সাধারণ নিয়মে গুণ করতে হবে। নিচের উদাহরণটি লক্ষ্য কর।

উদা. 1. $3a^3-4a+2a^2+1$কে $2a+a^2-3$ দিয়ে গুণ কর।

এখানে গুণ্য ও গুণক উভয়ে এক অক্ষর যুক্ত রাশি। কিন্তু অক্ষরের উর্ধ্বক্রম বা নিম্নক্রম অনুসারে সাজানো নয়। প্রথমতঃ গুণ্য $3a^3-4a+2a^2+1$কে a-অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজালে হবে $3a^3+2a^2-4a+1$; তারপর গুণক $2a+a^2-3$কে a-অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজালে হবে a^2+2a-3 ; গুণ্য

ও গুণক উভয়কে ঘাতের নির্দিষ্ট ক্রম অনুসারে সাজানোর পর নিচের নিয়ম অনুসারে গুণ করা হবে।

গুণ্য $=3a^3+2a^2-4a+1$
গুণক $= \quad a^2+2a-3$

$3a^5+2a^4-4a^3+a^2$ (গুণকের a^2 দিয়ে গুণ)
$6a^4+4a^3-8a^2+2a$ (গুণকের $2a$ দিয়ে গুণ)
$-9a^3-6a^2+12a-3$ (গুণকের -3 দিয়ে গুণ)

$3a^5+8a^4-9a^3-13a^2+14a-3$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=3a^5+8a^4-9a^3-13a^2+14a-3.$

এবার দু'অক্ষরযুক্ত রাশিকে দু'অক্ষরযুক্ত রাশি দিয়ে কি ভাবে গুণ করতে হয় তা দেখ।

উদা. 2. x^2+xy-y^2কে y^2+x^2-xy দিয়ে গুণ কর।

গুণ্য ও গুণক উভয় রাশিকে x-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজিয়ে নিয়ে গুণ করা হল।

গুণ্য $=x^2+xy-y^2$
গুণক $=x^2-xy+y^2$

$x^4+x^3y-x^2y^2$ (গুণকের x^2 দিয়ে গুণ)
$-x^3y-x^2y^2+xy^3$ (গুণকের $-xy$ দিয়ে গুণ)
$x^2y^2+xy^3-y^4$ („ y^2 „ „)

$x^4 \quad -x^2y^2+2xy^3-y^4$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=x^4-x^2y^2+2xv^3-y^4$

লক্ষ কর, গুণ্য ও গুণককে x^2এর অধঃক্রম অনুসারে সাজান হয়েছে। আরও লক্ষ কর, উপরের তিনটি আংশিক গুণফলকে একটির নিচে আর একটি এমন ভাবে সাজান হয়েছে যে, বিভিন্ন সারির সদৃশ-পদগুলি যেন ঠিক উপর নিচে একই স্তম্ভে বসে। সর্বনিম্ন সারির নিচে আর একটি রেখা টেনে বীজগণিতের নিয়মে বিভিন্ন স্তম্ভের যোগ করে তাদের একটি সারিতে লেখা হয়েছে। যা পাওয়া গেল তাই নির্ণেয় গুণফল।

উদা. 3. $3a^2-4ax+x^2$কে $5x^2-2ax-2a^2$ দিয়ে গুণ কর।

গুণ্য ও গুণক উভয়কে xএর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে সাজালে

$$\begin{array}{rl}
\text{গুণ্য} = & 3a^2-4ax+x^2 \\
\text{গুণক} = & -2a^2+2ax+5x^2 \\
\hline
& -6a^4+8a^3x-2a^2x^2 \\
& \qquad 6a^3x-8a^2x^2+2ax^3 \\
& \qquad\qquad 15a^2x^2-20ax^3+5x^4 \\
\hline
& -6a^4+14a^3x+5a^2x^2-18ax^3+5x^4
\end{array}$$

∴ নির্ণেয় গুণফল $=-6a^4+14a^3x+5a^2x^2-18ax^3+5x^4$

উদা. 4. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$কে $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ দিয়ে গুণ কর।

$$\begin{array}{l}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\
\hline
a^6+3a^5b+3a^4b^2+a^3b^3 \\
\quad -3a^5b-9a^4b^2-9a^3b^3-3a^2b^4 \\
\qquad\qquad 3a^4b^2+9a^3b^3+9a^2b^4+3ab^5 \\
\qquad\qquad\qquad -a^3b^3-3a^2b^4-3ab^5-b^6 \\
\hline
a^6 \qquad -3a^4b^2 \qquad\qquad +3a^2b^4 \qquad\qquad -b^6
\end{array}$$

∴ নির্ণেয় গুণফল $=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$

টীকা : উপরের উদাহরণে গুণ্য ও গুণক উভয়েই সমমাত্র রাশি এবং এদের প্রত্যেকের মাত্রা তিন। লক্ষ কর, গুণ্য ও গুণক উভয়ের প্রথম পদে a-অক্ষরের ঘাত 3, দ্বিতীয় পদে a-র ঘাত 2 এবং b-এর ঘাত 1, সুতরাং দ্বিতীয় পদের মোট ঘাত $(2+1)=3$, অনুরূপে তৃতীয় ও চতুর্থ পদেরও ঘাত 3. তাই গুণ্য ও গুণক উভয়ে সমমাত্র রাশি। লক্ষ কর, গুণফলও একটি সমমাত্র রাশি এবং এর প্রতি পদের মাত্রা ছয়।

দুইএর অধিক বহুপদ রাশির গুণ :

প্রথমতঃ যে কোন দুটি রাশিকে পূর্বের নিয়মে গুণ করে যে গুণফল পাওয়া যাবে, তাকে গুণ্য ধরে তৃতীয় একটি রাশিকে গুণক ধরে পূর্বের ন্যায় আবার গুণ করতে হবে। পুনরায় লব্ধ গুণফলকে গুণ্য ধরে অবশিষ্ট রাশিগুলির যে কোন একটিকে গুণক ধরে গুণ করতে হবে। এভাবে শেষ রাশি পর্যন্ত এগিয়ে গেলেই গুণ ক্রিয়া সম্পন্ন হবে।

উদা. 5. $x^2+x+1,\ x^2-x+1$ এবং x^4-x^2+1এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r}
x^2+x+1 \\
x^2-x+1 \\
\hline
x^4+x^3+x^2 \qquad\qquad \\
-x^3-x^2-x \qquad \\
x^2+x+1 \\
\hline
x^4 \qquad +x^2 \qquad +1
\end{array}$$

সুতরাং প্রথম দুটি রাশির গুণফল$=x^4+x^2+1$; এই গুণফলকে গুণ্য এবং তৃতীয় রাশিটিকে গুণক ধরে পূর্বের ন্যায় গুণ করতে হবে।

$$\begin{array}{r}
x^4+x^2+1 \\
x^4-x^2+1 \\
\hline
x^8+x^6+x^4 \qquad\qquad \\
-x^6-x^4-x^2 \qquad \\
x^4+x^2+1 \\
\hline
x^8 \qquad +x^4 \qquad +1
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল$=x^8+x^4+1$

তিনটির বেশী রাশি থাকলেও একই ভাবে গুণ করতে হবে।

'বিচ্ছিন্ন সহগ' পদ্ধতির সাহায্যে গুণ :

যদি একটি সাধারণ অক্ষরবিশিষ্ট বিভিন্ন ঘাতযুক্ত দুটি রাশি গুণ্য ও গুণক হিসাবে থাকে, তবে 'বিচ্ছিন্ন সহগ' পদ্ধতির সাহায্যে গুণ করলে পরিশ্রমের লাঘব হয়। এ পদ্ধতিতে গুণ্য ও গুণকের কেবল

সহগগুলি লিখে যাবার পদ্ধতিতেই গুণ করা হয়ে থাকে। সহগ গুণের পর অক্ষরের পর পর ঘাত বসাতে হয়। এ পদ্ধতিতেও সাধারণ অক্ষরের ঘাতের উর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে সাজিয়ে নিতে হয়। কোন একটি নির্দিষ্ট ঘাতযুক্ত অক্ষর গুণ্য বা গুণকে উপস্থিত না থাকলে সেই সহগকে 0 (শূন্য) ধরে নিতে হবে। নিচের উদাহরণটি লক্ষ কর।

উদা. 6. $5x^2-6x+3$কে $x-4$ দিয়ে গুণ কর।

প্রথমতঃ গুণ্য ও গুণকের সহগ বিচ্ছিন্ন করা হল।

$$\begin{array}{r} 5-6\ +3 \\ \underline{1-4} \\ 5-6\ +3 \\ \underline{-20+24-12} \\ 5-26+27-12 \end{array}$$

এখানে গুণ্য ও গুণকের সাধারণ অক্ষর xএর সর্বোচ্চ ঘাত যথাক্রমে 2 এবং 1 ; সুতরাং গুণফলের সর্বোচ্চ ঘাত $(2+1)=3$ হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল$=5x^3-26x^2+27x-12$

উদা. 7. $3a^3-2a^2+5$কে $2a^2+3a-3$ দিয়ে গুণ কর।

$$\begin{array}{r} 3-2+\ 0+5 \\ \underline{2+3-\ 3} \\ 6-4+\ 0+10 \\ +9-\ 6+\ 0+15 \\ \underline{-\ 9+\ 6-\ 0-15} \\ 6+5-15+16+15-15 \end{array}$$

[এখানে গুণ্যে a যুক্ত পদ নেই বলে, a-অক্ষরের সহগ 0 ধরা হয়েছে]

এখানে গুণফলের a অক্ষরের সর্বোচ্চ ঘাত অবশ্যই 5 এবং বাঁদিকের সহগ 6এর সঙ্গে a^5 জুড়ে দিতে হবে। পরবর্তী সহগগুলির সঙ্গে a ঘাতের অধঃক্রমে জুড়ে দিতে হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল$=6a^5+5a^4-15a^3+16a^2+15a-15$

দ্রষ্টব্য : দুই অক্ষর যুক্ত সমমাত্রবিশিষ্ট দুটি রাশিকেও বিচ্ছিন্ন সহগ পদ্ধতির সাহায্যে গুণ করা যায়।

প্রশ্নমালা 8

গুণ কর :

1. $2a+3b+5$কে $3a+4b+2$ দিয়ে
2. $3x-4y+5z$কে $x+y-z$ দিয়ে
3. $5a^2-6a+8$কে $3a^2+2a-3$ দিয়ে
4. $5x^3+3x-2$কে $2x^2-x+3$ দিয়ে
5. x^4+x^2+1কে x^4-x^2+1 দিয়ে
6. $2k^2-3k-1$কে $3k^2-k-1$ দিয়ে
7. $8a^3-3a-2a^2$কে $3a^2-5a+1$ দিয়ে
8. $5m^2+3-4m$কে $5-4m+3m^2$ দিয়ে
9. $4x+3x^3-2x^2+1$কে $x-2x^2+2$ দিয়ে
10. $x^2-5+x^4-3x+2x^3$কে $5+x^2-3x$ দিয়ে
11. $2a^2+3ab+b^2$কে a^2-ab+b^2 দিয়ে
12. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$কে x^2-xy+y^2 দিয়ে
13. $p^3-p^2q^2+q^3$কে p^2+q^2+1 দিয়ে
14. $a^3-4a^2b+ab^2-b^3$কে a^2+ab+b^2 দিয়ে
15. $2ax^2+3bx+4c$কে ax^2-bx-c দিয়ে
16. $4x+3x^3-2x^2+1$কে $x-2x^2+2$ দিয়ে
17. $6y^2+y^4+1-4y^3-4y$কে $1+y^2-2y$ দিয়ে
18. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$কে $x+y+z$ দিয়ে
19. $2a^3b-3ab^3-a^4+5a^2b^2$কে $2a^4-3a^3b+2ab^3-4a^2b^2$ দিয়ে
20. $a^2-ab+b^2+a+b+1$কে $a-b+1$ দিয়ে
21. px^3+qx^2+rx+sকে px^2-qx-r দিয়ে
22. $a^3b^3-c^3+abc^2-a^2b^2c$ কে $a^3b^2-a^2bc-ac^2$ দিয়ে

গুণফল নির্ণয় কর :

23. $(a+b), (a-b), (a^2+b^2)$.
24. $(x-y), (x^2+xy+y^2), (x^3+y^3)$.
25. $(3x+1), (2x-5), (x+2)$.
26. $(2x-3y), (4x+5y), (2x^2-3xy+y^2)$.

27. $(a-b), (a+b), (a^4+a^2b^2+b^4)$.

28. $(ax+by), (ax-b), (a^2x^2-abxy+b^2y^2)$.

29. $(x^2+2xy+3y^2), (x^2-2xy+3y^2), (x^4-2x^2y^2+3y^4)$.

30. $(a+b+c), (a-b+c), (b+c-a), (b+a-c)$.

31. $(a^2-ab+b^2), (a^2+ab+b^2), (a^4-a^2b^2+b^4)$.

32. $(xy+yz+zx), (yz-zx+xy), (xy+yz)$.

33. $(2x-3y), (4x^2+6xy+9y^2), (x+y), (x^2-xy+y^2)$.

'সহগ বিচ্ছিন্নকরণ' পদ্ধতি অনুসারে গুণফল নির্ণয় কর ঃ

34. $3x^2-5x+6$কে $2x-4$ দিয়ে

35. $5a^2-6a+8$কে $3a^2+5a-6$ দিয়ে

36. $2x^3-4x^2-5$কে $3x^2+4x-2$ দিয়ে

37. px^2+qx+r কে $ax+b$ দিয়ে

সরল কর ঃ

38. $(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

39. $a=lx+my+n, b=mx+ny+l, c=nx+ly+m$ হলে, $a(m+n)+b(n+l)+c(l+m)$-এর মান নির্ণয় কর।

40. $p=a^2+ab+b^2, q=b^2+bc+c^2, r=c^2+ca+a^2$ হলে, $(a+b)p+(b-c)q+(c-a)r$-এর মান নির্ণয় কর।

বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দিয়ে ভাগ ঃ

বহুপদ রাশিকে একপদ যুক্ত রাশি দিয়ে ভাগ করতে তোমরা সপ্তম শ্রেণীতে শিখেছ। বর্তমানে বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দিয়ে কিভাবে ভাগ করতে হয় তা দেখবে।

তোমরা জান, যে রাশিকে ভাগ করতে হয় তাকে ভাজ্য এবং যে রাশি দিয়ে ভাগ করা হয় তাকে ভাজক বলে। এক্ষেত্রেও গুণের নিয়মের মত ভাজ্য ও ভাজককে তাদের অন্তর্গত একটি সাধারণ অক্ষরের ঘাতের উর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে সাজিয়ে নিয়ে ভাগ ক্রিয়া সম্পন্ন করতে হবে।

প্রথমতঃ এক অক্ষর যুক্ত বহুপদ রাশিকে এক অক্ষর যুক্ত অপর একটি বহুপদ রাশি দিয়ে কিভাবে ভাগ করতে হয়, তা নিচের উদাহরণটি থেকে বুঝতে পারবে :

উদা. 1. $a^4-7a^2-2a^3+8a+12$কে $-a+a^2-6$ দিয়ে ভাগ কর।

প্রথমতঃ ভাজ্য ও ভাজক উভয়কে a অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজিয়ে নেওয়া হল।

ভাজ্য$=a^4-2a^3-7a^2+8a+12$

ভাজক$=a^2-a-6$

$$
\begin{array}{r|l}
a^2-a-6 & a^4-2a^3-7a^2+8a+12 \;(a^2-a-2 \\
 & \underline{a^4-a^3-6a^2} \\
 & -a^3-a^2+8a+12 \\
 & \underline{-a^3+a^2+6a} \\
 & -2a^2+2a+12 \\
 & \underline{-2a^2+2a+12}
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল$=a^2-a-2$

কিভাবে উপরের ভাগ ক্রিয়া সম্পন্ন হল তা দেখ। প্রথমতঃ ভাজ্যের প্রথম (বাঁদিকের) পদকে ভাজকের প্রথম (বাঁদিকের) পদ দিয়ে ভাগ করে $a^4\div a^2=a^2$ পাওয়া গেল। এই a^2-কে ভাগফলের প্রথম পদ হিসাবে নেওয়া হল। পূর্ণ ভাজককে এই পদটি দিয়ে গুণ করে গুণফলের পদগুলিকে ভাজ্যের সদৃশ পদগুলির নিচে সাজিয়ে লেখা হল। পূর্ণ ভাজ্য থেকে সেটি বিয়োগ করে ভাজ্যের দ্বিতীয় স্তর পাওয়া যাবে। এবার দ্বিতীয় স্তরের প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দিয়ে ভাগ করে পাওয়া যাবে $-a^3\div a^2=-a$; এই $(-a)$কে ভাগফলের দ্বিতীয় পদ নেওয়া হল এবং পূর্বের ন্যায় এ পদটি ভাজককে গুণ করে ভাজ্যের দ্বিতীয় স্তরের নিচে লিখে বিয়োগ করতে হবে। এভাবে এগিয়ে যেতে হবে যতদূর সম্ভব।

মন্তব্য : ভাজ্য ও ভাজককে অধঃক্রম অনুসারে না সাজিয়ে ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজিয়েও ভাগ ক্রিয়া সম্পন্ন করা যায়।

এবার একটি দুই অক্ষর যুক্ত বহুপদ রাশিকে কিভাবে দুই অক্ষর যুক্ত বহুপদ রাশি দিয়ে ভাগ করতে হয়, তা দেখ।

উদা. 2. $3a^3+8a^2b+9ab^2+10b^3$কে $a+2b$ দিয়ে ভাগ কর।

এখানে ভাজ্য ও ভাজক উভয়ে a-অক্ষরের অধঃক্রম অনুসারে সাজান আছে।

$$
\begin{array}{r|l|l}
a+2b & 3a^3+8a^2b+9ab^2+10b^3 & 3a^2+2ab+5b^2 \\
 & \underline{3a^3+6a^2b} & \\
 & \quad 2a^2b+9ab^2+10b^3 & \\
 & \quad \underline{2a^2b+4ab^2} & \\
 & \qquad 5ab^2+10b^3 & \\
 & \qquad \underline{5ab^2+10b^3} &
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল$=3a^2+2ab+5b^2$

এবার কিভাবে এই ভাগ ক্রিয়া সম্পন্ন হল তা দেখ। পূর্বের ন্যায় $3a^3 \div a=3a^2$কেই ভাগফলের প্রথম পদ নেওয়া হয়েছে; তার পর পূর্ণ ভাজককে $3a^2$ দিয়ে গুণ করে গুণফলকে ভাজ্যের নিচে সাজিয়ে লেখা হয়েছে এবং পূর্ণ ভাজ্য থেকে তা বিয়োগ করে ভাজ্যের দ্বিতীয় স্তর পাওয়া গেল। এবার $2a^2b \div a=2ab$, এটিকে ভাগফলের দ্বিতীয় পদ ধরে পূর্বের ন্যায় এগিয়ে যেতে হবে, যতক্ষণ না ভাগ ক্রিয়া সম্পূর্ণ হয়।

উদা. 3. $16x^4+36x^2+81$কে $4x^2+6x+9$ দিয়ে ভাগ কর।

এখানে ভাজ্য ও ভাজক উভয়ে x অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজান আছে; লক্ষ্য কর, ভাজ্যে x^3 এবং x যুক্ত পদ অনুপস্থিত অর্থাৎ x^3 এবং x-এর সহগ শূন্য। তাই ভাজ্যকে লেখার সময় x^3 এবং x-এর অংশে কিছুটা স্থান ফাঁক রাখা হয় যাতে সদৃশ-পদগুলি একটির নিচে একটি ঠিক বসানো যেতে পারে। এবার ভাগ ক্রিয়াটি লক্ষ্য কর।

$$
\begin{array}{r|l}
4x^2+6x+9 & 16x^4 \qquad +36x^2 \qquad +81 \;\big(4x^2-6x+9 \\
 & \underline{16x^4+24x^3+36x^2} \\
 & \quad -24x^3 \qquad\qquad +81 \\
 & \quad \underline{-24x^3-36x^2-54x} \\
 & \qquad\qquad 36x^2+54x+81 \\
 & \qquad\qquad \underline{36x^2+54x+81}
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=4x^2-6x+9$

উদা. 4. $2+x-8x^2+4x^3+x^4-3x^5+x^6$কে $1+2x-x^2$ দিয়ে ভাগ কর।

এখানে ভাজ্য ও ভাজক উভয়ে x-অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রমে সাজান আছে।

$$
\begin{array}{r|l}
1+2x-x^2 & 2+x-8x^2+4x^3+x^4-3x^5+x^6 \;\big(2-3x+x^3-x^4 \\
 & \underline{2+4x-2x^2} \\
 & \quad -3x-6x^2+4x^3+x^4-3x^5+x^6 \\
 & \quad \underline{-3x-6x^2+3x^3} \\
 & \qquad\qquad x^3+x^4-3x^5+x^6 \\
 & \qquad\qquad \underline{x^3+2x^4-x^5} \\
 & \qquad\qquad\quad -x^4-2x^5+x^6 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-x^4-2x^5+x^6}
\end{array}
$$

নির্ণেয় ভাগফল $=2-3x+x^3-x^4$

উদা. 5. $a^3+b^3+c^3-3abc$কে $a+b+c$ দিয়ে ভাগ কর।

$$
\begin{array}{r|l}
a+b+c & a^3 \qquad -3abc \qquad +b^3 \qquad +c^3 \;\big(a^2-ab-ca+b^2-bc+c^2 \\
 & \underline{a^3+a^2b+a^2c} \\
 & -a^2b-a^2c-3abc \qquad +b^3 \qquad +c^3 \\
 & \underline{-a^2b-ab^2-abc} \\
 & -a^2c+ab^2-2abc \qquad +b^3 \qquad +c^3 \\
 & \underline{-a^2c \qquad -abc-ac^2} \\
 & \qquad ab^2-abc+ac^2+b^3 \qquad +c^3 \\
 & \qquad \underline{ab^2 \qquad\qquad +b^3+b^2c} \\
 & \qquad\quad -abc+ac^2 \qquad -b^2c+c^3 \\
 & \qquad\quad \underline{-abc \qquad -bc^2-b^2c} \\
 & \qquad\qquad\quad ac^2+bc^2 \qquad +c^3 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{ac^2+bc^2 \qquad +c^3}
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$

উদা. 6. $2x^6-2$কে x^3+2x^2+2x+1 দিয়ে ভাগ কর।

$$x^3+2x^2+2x+1 \,\big)\, 2x^6 - 2 \,\big(\, 2x^3-4x^2+4x-2$$

$$
\begin{array}{r}
2x^6+4x^5+4x^4+2x^3 \qquad\qquad \\
\hline
-4x^5-4x^4-2x^3 \qquad -2 \\
-4x^5-8x^4-8x^3-4x^2 \qquad\quad \\
\hline
4x^4+6x^3+4x^2 \qquad -2 \\
4x^4+8x^3+8x^2+4x \qquad \\
\hline
-2x^3-4x^2-4x-2 \\
-2x^3-4x^2-4x-2 \\
\hline
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় ভাগফল $=2x^3-4x^2+4x-2$.

প্রশ্নমালা 9

ভাগ কর ঃ

1. a^2+3a+2কে $a+1$ দিয়ে
2. x^2+4x+4কে $x+2$ দিয়ে
3. $m^2+7m+12$কে $m+4$ দিয়ে
4. a^2+5a+6কে $a+3$ দিয়ে
5. $x^2-9x+20$কে $x-5$ দিয়ে
6. $m^2-4m-21$কে $m+3$ দিয়ে
7. $x^2-13x+22$কে $x-11$ দিয়ে
8. $a^2-3a-40$কে $a+5$ দিয়ে
9. $p^2-8p-65$কে $p-13$ দিয়ে
10. $3x^2+8x+4$কে $3x+2$ দিয়ে
11. $3y^2+y-2$কে $y+1$ দিয়ে
12. $6c^2-7c+2$কে $3c-2$ দিয়ে
13. $-15x^2+17x+4$ কে $5x+1$ দিয়ে
14. $-21m^2+58m-21$কে $3m-7$ দিয়ে
15. $4a^2-9b^2$কে $2a+3b$ দিয়ে
16. $36c^2-6cd-2d^2$কে $-6c+2d$ দিয়ে
17. $12a^2-31ab+20b^2$কে $4a-5b$ দিয়ে
18. $6x^3y-x^2y^2-7xy^3+12y^4$কে $2x+3y$ দিয়ে

19. $24x^2-65xy+21y^2$কে $8x-3y$ দিয়ে

20. $2a^4c-7a^3bc^2+9ab^3c^4$কে $2a^2-3abc$ দিয়ে

21. $2a^3-7a^2-a+2$কে a^2-3a-2 দিয়ে

22. x^3-4x^2+x+6কে x^2-x-2 দিয়ে

23. $6a^3-17a^2-16a+7$কে $3a^2+2a-1$ দিয়ে

24. $1-2a^2+3a^4-5a^3+3a$কে $1-3a^2+2a$ দিয়ে

25. $m^4-2m^3-7m^2+8m+12$কে m^2-m-6 দিয়ে

26. $81x^4-1$কে $3x-1$ দিয়ে

27. $5y^3+1+10y^4-4y^2$কে $5y^3-2y+1$ দিয়ে

28. $33p^2-13p^3+15p^4-9p+10$কে $5p^2-p+2$ দিয়ে

29. $15a^4-32a^3+50a^2-32a+15$কে $5a^2-4a+3$ দিয়ে

30. $4c^2-12c-d^2+9$কে $2c+d-3$ দিয়ে

31. $24x^2-65xy+21y^2$কে $8x-3y$ দিয়ে

32. $a^2-4ab+4b^2-9c^2$কে $a-2b+3c$ দিয়ে

33. $6m^4+22mn^3-8m^2n^2-11m^3n-8n^4$কে $6m^2+4n^2-11mn$ দিয়ে

34. $a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ac$কে $a+2b+3c$ দিয়ে

35. $x^3y^3+xy-9-y^4+3y^3+3y-x^4-3x^3-3x$কে $3-y+x^3$ দিয়ে

36. $2a^4x-7a^3bx^2+9ab^3x^4$কে $2a^2-3abx$ দিয়ে

অসম্পূর্ণ ভাগ :

যখন কোন ভাজ্য, ভাজক দিয়ে সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য নয়, অর্থাৎ ভাগ ক্রিয়ার সর্বশেষে এমন একটি অবশিষ্ট থাকে, যাকে আর ভাজক দিয়ে ভাগ করা সম্ভব নয়। তখন সেই প্রকার ভাগকেই অসম্পূর্ণ ভাগ বলে। নিচের উদাহরণটি লক্ষ্য কর।

উদা. 1. $6x^5-x^4+4x^3-5x^2-3x-18$ কে $2x^2-x+3$ দিয়ে ভাগ করে ভাগফল ও ভাগশেষ নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{l} 2x^2-x+3\,)\,6x^5-x^4+4x^3-5x^2-3x-18\,(\,3x^3+x^2-2x-5 \\ \qquad\qquad\quad 6x^5-3x^4+9x^3 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\quad 2x^4-5x^3-5x^2-3x-18 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 2x^4-x^3+3x^2 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -4x^3-8x^2-3x-18 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -4x^3+2x^2-6x \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -10x^2+3x-18 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -10x^2+5x-15 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -2x-3 \end{array}$$

∴ ভাগফল $=3x^3+x^2-2x-5$, ভাগশেষ $=-2x-3$

এখন লক্ষ্য কর, $-2x-3$কে $2x^2-x+3$ দিয়ে আর ভাগ করা যায় না; কারণ $-2x-3$ রাশিটির মাত্রা 1, যা $2x^2-x+3$ রাশিটির মাত্রা 2 অপেক্ষা কম।

মন্তব্য ঃ ভাগ ক্রিয়া ততক্ষণ চালিয়ে যেতে হবে, যতক্ষণ না বিয়োগফলের মাত্রা ভাজকের মাত্রা অপেক্ষা কম হয়। তাতে ভাগফলের কোন পদের সহগ ভগ্নাংশও হতে পারে।

বিচ্ছিন্ন সহগ ভাগ পদ্ধতিতে ভাগ :

বিচ্ছিন্ন সহগ পদ্ধতিতে গুণের প্রক্রিয়া তোমরা আগেই শিখেছ। এ পদ্ধতি ভাগের ক্ষেত্রেও প্রয়োগ করা যায়।

যদি ভাজ্য ও ভাজক উভয়েই কোন একটি নির্দিষ্ট অক্ষর যুক্ত রাশি হয়, তবে উহাদের অন্তর্গত পদসমূহের সহগগুলিকে অক্ষর থেকে বিচ্ছিন্ন করে ঘাতের অধঃক্রমানুসারে পরপর সাজিয়ে ভাগ ক্রিয়া সম্পন্ন করা যায়। নিচের উদাহরণটি লক্ষ্য কর।

উদা. 2. $6x^4+19x^3+25x^2+21x+9$ কে $2x^2+5x+3$ দিয়ে ভাগ কর।

এখানে ভাজ্য ও ভাজক উভয়েই x—অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজান আছে।

প্রথমতঃ সাধারণ পদ্ধতিতে ভাগ ক্রিয়াটি দেখ :

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2+5x+3 & 6x^4+19x^3+25x^2+21x+9 \;(\,3x^2+2x+3 \\
 & \underline{6x^4+15x^3+\;9x^2} \\
 & \quad 4x^3+16x^2+21x+9 \\
 & \quad \underline{4x^3+10x^2+\;6x} \\
 & \qquad 6x^2+15x+9 \\
 & \qquad \underline{6x^2+15x+9}
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=3x^2+2x+3$

এবার বিচ্ছিন্ন সহগ পদ্ধতিতে ভাগ ক্রিয়াটি দেখ।

$$
\begin{array}{r|l}
2+5+3 & 6+19+25+21+9 \;(\,3+2+3 \\
 & \underline{6+15+\;9} \\
 & \quad 4+16+21+9 \\
 & \quad \underline{4+10+6} \\
 & \qquad 6+15+9 \\
 & \qquad \underline{6+15+9}
\end{array}
$$

ভাগফলের xএর সর্বোচ্চ ঘাত অবশ্যই 2 হবে। সুতরাং নির্ণেয় ভাগফল $=3x^2+2x+3$

মন্তব্য : যদি ভাজ্য বা ভাজকের সাধারণ অক্ষরের কোন এক শক্তিবিশিষ্ট পদ বর্তমান না থাকে, তবে উক্ত পদের সহগ শূন্য ধরে পূর্বের নিয়মে ভাগ ক্রিয়া সম্পন্ন করতে হবে। নিচের উদাহরণটি লক্ষ্য কর।

উদা. 3. $2x^5-5x^2+3$কে x^2-2x+1 দিয়ে ভাগ কর।

লক্ষ্য কর এখানে ভাজ্যে x^4, x^3, x যুক্ত পদ অনুপস্থিত। সুতরাং ঐ সমস্ত পদগুলির সহগ 0 (শূন্য) ধরে নিতে হবে।

$$
\begin{array}{r|l}
1-2+1 & 2+0+0-5+0+3 \;(\,2+4+6+3 \\
 & \underline{2-4+2} \\
 & \quad 4-2-5+0+3 \\
 & \quad \underline{4-8+4} \\
 & \qquad 6-\;9+0+3 \\
 & \qquad \underline{6-12+6} \\
 & \qquad\quad 3-6+3 \\
 & \qquad\quad \underline{3-6+3}
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=2x^3+4x^2+6x+3$

অসম্পূর্ণ ভাগের ক্ষেত্রেও বিচ্ছিন্ন সহগ পদ্ধতির প্রয়োগ করা যায়।

উদা. 4. $a^4-2a^3-7a^2+10a+13$কে a^2-a-6 দিয়ে ভাগ কর।

```
1−1−6)1−2−7+10+13(1−1−2
      1−1−6
      ─────────────
       −1−1+10+13
       −1+1+ 6
       ────────────
          −2+ 4+13
          −2+ 2+12
          ─────────
              2+ 1
```

∴ নির্ণেয় ভাগফল$=a^2-a-2$

নির্ণেয় ভাগশেষ$=2a+1$

মন্তব্য : যতক্ষণ না ভাগশেষের মোট পদ সংখ্যা ভাজকের মোট পদ সংখ্যার চেয়ে কম হয়, ততক্ষণ পর্যন্ত ভাগ ক্রিয়া চালিয়ে যেতে হবে।

প্রশ্নমালা 10

ভাগফল ও ভাগশেষ নির্ণয় কর :

1. $12a^2+14a+8$কে $3a+2$ দিয়ে
2. $10x^2-8x+5$কে $5x-1$ দিয়ে
3. $5a^3-4a^2+2a-3$কে a^2+2a-1 দিয়ে
4. $x^3-x^2-8x-13$কে x^2+3x+3 দিয়ে
5. $12x^4+5x^3-33x^2-3x+16$কে $4x^2-x-5$ দিয়ে
6. $p^4-6p^3+13p^2-10p+7$কে p^2-3p+2 দিয়ে
7. $15x^4+22-32x^3-30x+50x^2$কে $3-4x+5x^2$ দিয়ে
8. $x^5-2x^4-4x^3+23x^2-31x+12$কে x^2-2x+3 দিয়ে
9. $18a^3+24b^3-40ab^2-9a^2b$কে $9a^2+7b^2-16ab$ দিয়ে
10. $x^5+x^4y-x^3y^2+x^3-2xy^2$কে x^2+xy-y^2 দিয়ে

বিচ্ছিন্ন সহগ পদ্ধতিতে ভাগফল নির্ণয় কর এবং সম্ভাব্য ক্ষেত্রে ভাগশেষ নির্ণয় কর :

11. $2a^3-9a^2b+13ab^2-9b^3$কে $2a-3b$ দিয়ে

12. $63x^2-19x-20$কে $9x+5$ দিয়ে

13. $21a^3-26a^2-15a+20$কে $7a^2+3a-4$ দিয়ে

14. $2a^4+11a^3-13a^2-99a-45$কে $a^2+2a-15$ দিয়ে

15. $m^4-4m^3-18m^2-11m+2$কে m^2-7m+1 দিয়ে

16. $x^5-2x^4-4x^3-19x^2-31x+15$কে x^3-7x+5 দিয়ে

17. $2a^5-5a^2+3$কে a^2-2a+1 দিয়ে

18. $3x^5-5x^3+2$কে x^2-2x+1 দিয়ে

19. a^3+64কে $a^2-4a+16$ দিয়ে

20. $81x^4+2$কে $3x-1$ দিয়ে

21. $a^3-a^2-8a-13$কে a^2+3a+3 দিয়ে

22. $12x^4+5x^3-33x^2-3x+16$কে $4x^2-x-5$ দিয়ে

23. $a^5-2a^4-4a^3+20a^2-31a+10$কে a^2-2a+3 দিয়ে

24. $2a^6-2$কে a^3+2a^2+2a+1 দিয়ে

25. x^3+px^2+qx+rকে x^2+px+q দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় কর।

26 কোন ভাজক x^2-x+1 ভাগফল $2x^2+x-3$ এবং ভাগশেষ $x+2$; ভাজ্য কত ?

তৃতীয় অধ্যায়
বিভিন্ন সূত্রাবলী ও তাদের প্রয়োগ

দুটি পদের সমষ্টির ঘন নির্ণয়ের সূত্র :

সপ্তম শ্রেণীতে তোমরা নিচের সূত্রটি শিখেছ :

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. $(a+b)$কে পর পর দুবার গুণ করে সূত্রটি পাওয়া গিয়েছিল। অনুরূপভাবে $(a+b)$কে পর পর তিনবার গুণ করে $(a+b)^3$-এর সূত্রটিও পাওয়া যায়।

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)(a+b)\\&=(a+b)(a+b)^2\\&=(a+b)(a^2+2ab+b^2)\\&=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

তা হলে নিচের সূত্রটি পাওয়া গেল :

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\&=a^3+b^3+3ab(a+b)\end{aligned}$$

ব্লকের সাহায্যে সূত্রটির জ্যামিতিক ব্যাখ্যা :

7 সেমি এবং 3 সেমি বাহুবিশিষ্ট দুটি পৃথক্ ঘনক তৈরি কর। আবার এরূপ তিনটি আয়তঘন তৈরি কর যার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ 7 সেমি করে এবং বেধ 3 সেমি। অপর তিনটি আয়তঘন তৈরি কর যার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ 3 সেমি করে এবং বেধ 7 সেমি। সুতরাং নিম্নলিখিত ঘনফলের মোট আটটি ঘনবস্তু তৈরি হল।

7^3 ঘন সেমি—1টি

3^3 ঘন সেমি—1টি

$(7^2\times3)$ ঘন সেমি—3টি

(7×3^2) ঘন সেমি—3টি

∴ এদের মোট ঘনফল $=7^3+3\times7^2\times3+3\times7\times3^2+3^3$

এদের সঠিকভাবে সাজিয়ে দেখ তুমি একটি ঘনক পাবে যার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য $(7+3)$ সেমি। অর্থাৎ ঘনফল $(7+3)^3$ সেমি।

$$\therefore\ (7+3)^3=7^3+3\times7^2\times3+3\times7\times3^2+3^3$$

এখন সাধারণভাবে 7 সেমি$=a$, 3 সেমি$=b$ ধরলে,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

[এরূপ আরও কয়েক রকম মাপের ব্লক তৈরি করে পরীক্ষা কর।]

উদা. 1. $(x+5)$এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(x+5)^3=(x)^3+3(x)^2.5+3x.(5)^2+(5)^3$$
$$=x^3+15x^2+75x+125$$

উদা. 2. $(3a+4)$এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(3a+4)^3=(3a)^3+3.(3a)^2.4+3(3a)(4)^2+(4)^3$$
$$=27a^3+108a^2+144a+64$$

উদা. 3. $(4x+7y)$এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(4x+7y)^3=(4x)^3+3(4x)^2.7y+3.4x.(7y)^2+(7y)^3$$
$$=64x^3+336x^2y+588xy^2+343y^3$$

উদা. 4. সূত্রের সাহায্যে 75এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(75)^3=(70+5)^3$$
$$=(70)^3+3.(70)^2.5+3.70.(5)^2+(5)^3$$
$$=343000+73500+5250+125$$
$$=421875$$

উদা. 5. সূত্রের সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

$$6{\cdot}33\times6{\cdot}33\times6{\cdot}33+3\times6{\cdot}33\times6{\cdot}33\times3{\cdot}67+3\times6{\cdot}33\times3{\cdot}67\times3{\cdot}67+3{\cdot}67\times3{\cdot}67\times3{\cdot}67$$

প্রদত্ত রাশি$=(6{\cdot}33)^3+3\times(6{\cdot}33)^2\times3{\cdot}67+3\times(6{\cdot}33)\times(3{\cdot}67)^2+(3{\cdot}67)^3$

$$=(6{\cdot}33+3{\cdot}67)^3$$
$$=(10{\cdot}00)^3$$
$$=(10)^3=1000$$

উদা. 6. সরল কর :

$$(3a+2b)^3+3(3a+2b)^2(a-2b)+3(3a+2b)(a-2b)^2+(a-2b)^3$$

$3a+2b=x$, এবং $a-2b=y$ ধরে পাওয়া যায় :

প্রদত্ত রাশি $=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$=(x+y)^3$

$=(3a+2b+a-2b)^3$

$=(4a)^3=64a^3.$

বহুপদ রাশির ঘন

উদা. 7. $x+y+z$এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(x+y+z)^3=\{(x+y)+z\}^3$$

এখানে $(x+y)$কে প্রথম রাশি এবং z-কে দ্বিতীয় রাশি ধরে সূত্রটি প্রয়োগ করলে পাওয়া যাবে,

$$(x+y+z)^3$$
$$=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3$$
$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3(x^2+2xy+y^2)z+3xz^2+3yz^2+z^3$$
$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3x^2z+6xyz+3y^2z+3xz^2+3yz^2+z^3$$
$$=x^3+y^3+z^3+3y^2z+3yz^2+3z^2x+3zx^2+3x^2y+3xy^2+6xyz.$$

উদা. 8. $x^3+9x^2+27x+27$এর মান নির্ণয় কর, যখন $x=-3$.

$$x^3+9x^2+27x+27$$
$$=x^3+3.x^2.3+3.x.(3)^2+(3)^3$$
$$=(x+3)^3=(-3+3)^3=0.$$

উদা. 9. $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$এর মান নির্ণয় কর, যখন $a=2, b=1$.

$$8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$$
$$=(2a)^3+3.(2a)^2.3b+3.2a(3b)^2+(3b)^3$$
$$=(2a+3b)^3=(2.2+3.1)^3=(7)^3=343$$

উদা. 10. $x+y=6$ হলে, x^3+y^3+18xyএর মান নির্ণয় কর :

$$x^3+y^3+18xy=x^3+y^3+3.x.y.6$$
$$=x^3+y^3+3xy(x+y) \; [6=x+y \text{ বসিয়ে}]$$
$$=(x+y)^3$$
$$=(6)^3=216.$$

উদা. 11. $m+n=4$ হলে, দেখাও যে
$m^3+n^3+12mn=64$.

প্রদত্ত রাশি $=m^3+n^3+12mn$
$$=m^3+n^3+3mn.4$$
$$=m^3+n^3+3mn.(m+n) \quad [\because \; m+n=4]$$
$$=(m+n)^3$$
$$=(4)^3=64 \text{ [প্রমাণিত]}.$$

প্রশ্নমালা 11

সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত পদ সমষ্টির ঘন নির্ণয় কর :

1. $x+2$	2. $3a+4$	3. $4c+d$
4. $3m+2n$	5. a^2+2b	6. $ab+cd$
7. $3a+2bc$	8. x^2+yz	9. $x+yz^2$
10. p^2+q^2	11. $a+b+2c$	12. $a+2b+3c$
13. 95	14. 110	15. 125.

সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিতগুলির মান নির্ণয় কর :

16. $(29)^3+3\times(29)^2\times21+3\times29\times(21)^2+(21)^3$

17. $31{\cdot}63\times31{\cdot}63\times31{\cdot}63+3\times31{\cdot}63\times28{\cdot}37\times28{\cdot}37$
$+3\times31{\cdot}63\times31{\cdot}63\times28{\cdot}37+28{\cdot}37\times28{\cdot}37\times28{\cdot}37$

18. $2{\cdot}89\times2{\cdot}89\times2{\cdot}89+2{\cdot}11\times2{\cdot}11\times2{\cdot}11+15\times2{\cdot}89\times2{\cdot}11$.

সরল কর :

19. $(5a+2b)^3+3(5a+2b)^2(a-2b)+3(5a+2b)(a-2b)^2+(a-2b)^3$.

20. $(3x-2y+4z)^3+3(3x-2y+4z)^2(2y-4z)+3(3x-2y+4z)(2y-4z)^2+(2y-4z)^3$

21. $(2m+3n)^3+(2m-3n)^3+12m(4m^2-9n^2)$.

22. $(3x-7y)^3+(7y+x)^3+12x(3x-7y)(7y+x)$.

23. $8x^3+36x^2+54x+27$এর মান নির্ণয় কর, যখন $x=-1$.

24. $27m^3+54m^2n+36mn^2+8n^3$এর মান নির্ণয় কর, যখন $m=1$, $n=3$.

25. $a+b=8$ হলে, a^3+b^3+24abএর মান নির্ণয় কর।

26. $m+n=-3$ হলে, m^3+n^3-9mnএর মান নির্ণয় কর।

27. $x+y=5$ হলে, প্রমাণ কর $x^3+y^3+15xy=125$.

28. $a+b=2\frac{1}{3}$ হলে, প্রমাণ কর $a^3+b^3+7ab=12\frac{19}{27}$.

29. $a+b=-\frac{1}{3}$ হলে, প্রমাণ কর $a^3+b^3-ab=-\frac{1}{27}$.

30. $xy(x+y)=m$ হলে প্রমাণ কর $x^3+y^3+3m=\frac{m^3}{x^3y^3}$.

দুটি পদের অন্তরের ঘন নির্ণয়ের সূত্র :

দুটি পদের সমষ্টির ঘন যেরূপে নির্ণয় করা হয়েছে, ঠিক সেরূপে দুটি পদের অন্তরের ঘনও নির্ণয় করা যায়।

$$\begin{aligned}(a-b)^3&=(a-b)(a-b)(a-b)\\&=(a-b)(a-b)^2\\&=(a-b)(a^2-2ab+b^2)\\&=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)\\&=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\&=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

তাহলে সূত্রটি পাওয়া গেল :

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$=a^3-b^3-3ab(a-b)$$

মন্তব্য : এই সূত্রটিকে $(a+b)^3$এর সূত্র থেকেও দেখান যেতে পারে। $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. এখন bএর পরিবর্তে $-b$ বসালে কি হয় দেখ :

$$\{a+(-b)\}^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)+(-b)^3$$

বা, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

ব্লকের সাহায্যে সূত্রটির জ্যামিতিক ব্যাখ্যা :

7 সেমি এবং 3 সেমি বাহু বিশিষ্ট দুটি পৃথক ঘনক তৈরি কর। আবার দুরকমের 3টি করে আয়ত ঘন তৈরি কর, যাদের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ নিম্নরূপ :

প্রথম রকমের আয়তঘন—দৈর্ঘ্য 10 সেমি, প্রস্থ 7 সেমি ও বেধ 3 সেমি।

দ্বিতীয় রকমের আয়তঘন—দৈর্ঘ্য 10 সেমি, প্রস্থ ও বেধ প্রত্যেকেই 3 সেমি।

ঘনক দুটি এবং প্রথম রকমের আয়তঘন তিনটি সঠিকভাবে সাজালে একটি ঘনক পাওয়া যাবে যার বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সেমি। এবার দ্বিতীয় রকমের আয়তঘন তিনটি এদের সঙ্গে এমনভাবে জুড়ে দাও যে দু'রকমের দুটি আয়ত ঘন মিলে একটি আয়তঘন হবে যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 10 সেমি, 10 সেমি ও 3 সেমি হবে। এরূপ যে তিনটি আয়তঘন হবে সেগুলি এবং 3 সেমি বাহুবিশিষ্ট ঘনকটি সরিয়ে নিলে 7 সেমি বাহু বিশিষ্ট ঘনকটি পড়ে থাকবে।

$\therefore\ 7^3=10^3+3(10\times3^2)-3(10^2\times3)-3^3$

$\therefore\ (10-3)^3=10^3-3\times10^2\times3+3\times10\times3^2-3^3$

এ রকম আরও কয়েকটি পরীক্ষা করে দেখ,

সাধারণভাবে $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

উদা. 1. $(x-5)$এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(x-5)^3=(x)^3-3(x)^2.5+3.x.(5)^2-(5)^3$$
$$=x^3-15x^2+75x-125$$

উদা. 2. $(3x-2y)$এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(3x-2y)^3=(3x)^3-3(3x)^2.2y.+3.3x(2y)^2-(2y)^3$$
$$=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$$

উদা. 3. $(a-2b-3c)$এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(a-2b-3c)^3=\{(a-2b)-3c\}^3$$
$$=(a-2b)^3-3(a-2b)^2.3c+3.(a-2b)(3c)^2-(3c)^3$$
$$=a^3-3a^2.2b+3.a(2b)^2-(2b)^3-9c(a^2-4ab+4b^2)$$
$$+27c^2(a-2b)-27c^3$$
$$=a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3-9a^2c+36abc-36b^2c$$
$$+27ac^2-54bc^2-27c^3$$

উদা. 4. 199এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(199)^3=(200-1)^3$$
$$=(200)^3-3(200)^2.1+3.200.(1)^2-(1)^3$$
$$=8000000-120000+600-1$$
$$=8000600-120001$$
$$=7880599$$

উদা. 5. মান নির্ণয় কর :

$$16{\cdot}45\times16{\cdot}45\times16{\cdot}45-3\times16{\cdot}45\times16{\cdot}45\times14{\cdot}45$$
$$+3\times16{\cdot}45\times14{\cdot}45\times14{\cdot}45-14{\cdot}45\times14{\cdot}45\times14{\cdot}45$$

প্রদত্ত রাশি$=(16{\cdot}45)^3-3.(16{\cdot}45)^2\ 14{\cdot}45$

$$+3.16{\cdot}45.(14{\cdot}45)^2-(14{\cdot}45)^3$$

$16{\cdot}45=a,\quad 14{\cdot}45=b$ ধরলে

প্রদত্ত রাশি$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$=(a-b)^3$

$=(16.45-14.45)^3=(2)^3=8$

উদা. 6. $a^3-12a^2b+48ab^2-64b^3$এর মান নির্ণয় কর, যখন $a=5, b=3$.

প্রদত্ত রাশি $=a^3-12a^2b+48ab^2-64b^3$

$=a^3-3.a^2\,4b+3.a.(4b)^2-(4b)^3$

$=(a-4b)^3$

$=(5-4.3)^3$ [a, bএর মান বসিয়ে]

$=(5-12)^3=(-7)^3=-343$

উদা. 7. $x-2y=5$ হলে, দেখাও যে

$x^3-8y^3-30xy=125$

$x^3-8y^3-30xy=x^3-(2y)^3-3\,x.2y.5$

$=x^3-(2y)^3-3x.2y(x-2y)$

[$x-2y=5$ বসিয়ে]

$=(x-2y)^3$

$=(5)^3=125.$

প্রশ্নমালা 12

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন নির্ণয় কর :

1. $a-3$	2. $2x-y$	3. $3m-n$
4. $2p-3q$	5. a^2-2b	6. $ab-cd$
7. $2x-3bc$	8. a^2-bc	9. $x-yz^2$
10. m^2-n^2	11. $1+b-2c$	12. $p-2q-3r$
13. a^3-1	14. $2-b^3$	15. 97
16. 298	17. 999	18. 249.

মান নির্ণয় কর :

19. $31\times31\times31-3\times31\times31\times26+3\times31\times26\times26$
$-26\times26\times26.$

20. $41.5\times41.5\times41.5-3\times41.5\times41.5\times38.5$
$+3\times41.5\times38.5\times38.5-38.5\times38.5\times38.5.$

21. $5.73\times5.73\times5.73-3.73\times3.73\times3.73-6\times5.73\times3.73.$

সরল কর :

22. $(4a-3b)^3-3(4a-3b)^2(4a-2b)+3(4a-3b)(4a-2b)^2$
$-(4a-2b)^3.$

23. $(4x-3y-2z)^3-3(4x-3y-2z)^2(4x-2z)$
$+3(4x-3y-2z)(4x-2z)^2-(4x-2z)^3.$

24. $(2p+3q)^3-(2p-3q)^3-18q(4p^2-9q^2)$

25. $(3m-2n)^3-(2m-n)^3-3(3m-2n)(2m-n)(m-n).$

26. $8x^3-36x^2+54x-27$এর মান নির্ণয় কর, যখন $x=2.$

27. $27a^3-108a^2b+144ab^2-64b^3$এর মান নির্ণয় কর,
যখন $a=4,\ b=3.$

28. $27m^3-54m^2n+36mn^2-8n^3$এর মান নির্ণয় কর,
যখন $m=1\frac{1}{3},\ n=2\frac{1}{2}.$

29. $a-b=6$ হলে, a^3-b^3-18abএর মান নির্ণয় কর।

30. $2x-3y=4$ হলে, দেখাও যে, $8x^3-27y^3-72xy=64.$

অনুসিদ্ধান্ত :

আমরা পূর্বের সূত্রে পেয়েছি $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b).$ পক্ষান্তর করে লেখা যায়, $\boxed{a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b).}$ অনুরূপে, $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$কে পক্ষান্তর করে লেখা যায় $\boxed{a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b).}$

অনুসিদ্ধান্তের প্রয়োগ :

উদা. 1. $a+b=5,\ ab=6$ হলে, a^3+b^3এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(5)^3-3.6.5=125-90=35$

উদা. 2. $a-b=3$, $ab=40$ হলে, a^3-b^3এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$$=(3)^3+3.40.3=27+360=387$$

উদা. 3. $x+\frac{1}{x}=5$ হলে, $x^3+\frac{1}{x^3}$এর মান নির্ণয় কর।

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=5^3-3\cdot5=125-15=110.$$

উদা. 4. $m-\frac{1}{m}=a$ হলে, $m^3-\frac{1}{m^3}$এর মান নির্ণয় কর।

$$m^3-\frac{1}{m^3}=(m)^3-\left(\frac{1}{m}\right)^3$$

$$=\left(m-\frac{1}{m}\right)^3+3.m.\frac{1}{m}\left(m-\frac{1}{m}\right)$$

$$=a^3+3a.$$

উদা. 5. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$ হলে, দেখাও যে $a^3+\frac{1}{a^3}=0$

$$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3.a\frac{1}{a}\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\left(a+\frac{1}{a}\right)-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$=3\left(a+\frac{1}{a}\right)-3\left(a+\frac{1}{a}\right)=0.$$

প্রশ্নমালা 13

1. a^3+b^3-এর মান নির্ণয় কর, যখন $a+b=6$, $ab=8$.
2. m^3+n^3-এর মান নির্ণয় কর, যখন $m+n=8$, $mn=15$.
3. x^3-y^3-এর নির্ণয় কর, যখন $x-y=2$, $xy=15$

4. p^3-q^3-এর মান নির্ণয় কর, যখন $p-q=5, pq=14$.

5. যদি $a+\frac{1}{a}=4$ হয়, তবে $a^3+\frac{1}{a^3}$এর মান নির্ণয় কর।

6. যদি $\left(p+\frac{1}{p}\right)^2=3$ হয়, তবে $p^3+\frac{1}{p^3}$এর মান নির্ণয় কর।

7. $2a+\frac{1}{2a}=5$ হলে, দেখাও যে $8a^3+\frac{1}{8a^3}=110$

8. যদি $m-\frac{1}{m}=6$ হয়, তবে $m^3-\frac{1}{m^3}$এর মান নির্ণয় কর।

9. যদি $c+\frac{1}{c}=k$ হয়, তবে দেখাও যে $c^3+\frac{1}{c^3}=k^3-3k$

10. যদি $x-\frac{1}{x}=p$ হয়, তবে দেখাও যে $x^3-\frac{1}{x^3}=p^3+3p$

11. $a+b=5, ab=6$ হলে,
$(a^2+b^2)(a^3+b^3)$এর মান নির্ণয় কর।

12. $m-n=2$ $mn=15$ হলে,
$(m^2-n^2)(m^3-n^3)$এর মান নির্ণয় কর।

সূত্র : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

সূত্রের প্রমাণ : (ডান পক্ষ ধরে)

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$$
$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3$$

$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(বাম পক্ষ ধরে) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$$=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$$
$$=(a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

সূত্রের প্রয়োগ :

উদা. 1. x^2-2x+4কে $x+2$ দিয়ে গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(x+2)(x^2-2x+4)$

$=(x+2)(x^2-x.2+2^2)$

$=x^3+2^3=x^3+8$

উদা. 2. $9x^2-12xy+16y^2$ কে $3x+4y$ দিয়ে গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(3x+4y)(9x^2-12xy+16y^2)$

$=(3x+4y)\{(3x)^2-3x.4y+(4y)^2\}$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ [$3x=a, 4y=b$ ধরে]

$=a^3+b^3$

$=(3x)^3+(4y)^3$ [a, bএর মান বসিয়ে]

$=27x^3+64y^3$

উদা. 3. $a^2b^2-abc+c^2$কে $ab+c$ দিয়ে গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(ab+c)(a^2b^2-abc+c^2)$

$=(ab+c)\{(ab)^2-ab.c+c^2\}$

$=a^3b^3+c^3$

প্রশ্নমালা 14

নিম্নলিখিত গুণফলগুলি নির্ণয় কর [সূত্র প্রয়োগ করে] ঃ

1. $(x+3)(x^2-3x+9)$
2. $(1+3a)(1-3a+9a^2)$
3. $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$
4. $(mn+p)(m^2n^2-mnp+p^2)$
5. $(a+bc)(a^2-abc+b^2c^2)$
6. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
7. $(4p+5q)(16p^2-20pq+25q^2)$
8. $(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}$
9. $(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

10. $(x+2y+z)\{(x+y)^2-(x+y)(y+z)+(y+z)^2\}$

11. $(2a+3)\{(a+2)^2-(a+2)(a+1)+(a+1)^2\}$

12. $3x\{(2x-1)^2-(2x-1)(x+1)+(x+1)^2\}$

সূত্র : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

সূত্রের প্রমাণ (ডান পক্ষ ধরে)

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$$
$$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$
$$=a^3-b^3$$

$\therefore\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(বাম পক্ষ ধরে) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$$=(a-b)\{(a-b)^2+3ab\}$$
$$=(a-b)(a^2-2ab+b^2+3ab)$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

মন্তব্য : a^3+b^3 বা a^3-b^3 আকারে লিখিত যে কোন রাশিকে এ দুটি সূত্রের প্রয়োগে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

সূত্রের প্রয়োগ :

উদা. 1. $9x^2+6xy+4y^2$কে $3x-2y$ দিয়ে গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$
$$=(3x-2y)\{(3x)^2+3x.2y+(2y)^2\}$$
$$=(3x)^3-(2y)^3$$
$$=27x^3-8y^3$$

উদা. 2. $(m+n)^2+(m+n)(n+p)+(n+p)^2$কে $m-p$ দিয়ে গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল

$$=(m-p)\{(m+n)^2+(m+n)(n+p)+(n+p)^2\}$$

$=\{(m+n)-(n+p)\}\{(m+n)^2+(m+n)(n+p)$
$+(n+p)^2\}$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ $[m+n=a,\ n+p=b$ ধরে$]$

$=a^3-b^3$

$=(m+n)^3-(n+p)^3$ [a, bএর মান বসিয়ে]

$=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3-n^3-3n^2p-3np^2-p^3$

$=m^3+3m^2n+3mn^2-3n^2p-3np^2-p^3$

প্রশ্নমালা 15

সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(x-3(x^2+3x+9)$ 2. $(1-4x)(1+4x+16x^2)$
3. $(3a-5b)(9a^2+15ab+25b^2)$
4. $(ab-cd)(a^2b^2+abcd+c^2d^2)$
5. $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
6. $(a^2-2bc)(a^4+2a^2bc+4b^2c^2)$
7. $(2x-3y)(2x+3y)(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$
8. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a^3+8b^3)$

সরল কর :

9. $(x-y)(x^2+xy+y^2)+(y-z)(y^2+yz+z^2)$
$+(z-x)(z^2+zx+x^2)$
10. $(2a+3)(4a^2-6a+9)-(2a-3)(4a^2+6a+9)$
11. $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
12. $(x+1)(x^2-x+1)+(2x-1)(4x^2+2x+1)$
$-(x-1)(x^2+x+1)$

চতুর্থ অধ্যায়

সূত্রের সাহায্যে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

পূর্ব অধ্যায়ে আমরা যে সমস্ত সূত্র সম্বন্ধে আলোচনা করেছি, তাদের মধ্যে নিচের দুটি লক্ষ্য কর ঃ

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

এখানে দেখা যাচ্ছে a^3+b^3 বা a^3-b^3 উভয়েই দুটি বীজগণিতীয় রাশির গুণফলের সমান। সুতরাং বলা যাচ্ছে a^3+b^3এর উৎপাদকদ্বয় $a+b$ এবং a^2-ab+b^2 ; অনুরূপে a^3-b^3এর উৎপাদকদ্বয় $a-b$ এবং a^2+ab+b^2 ।

এ দুটি সূত্রের প্রয়োগে আমরা এই আকারের বীজগণিতীয় রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারি। নিচের উদাহরণগুলি লক্ষ্য করে দেখ।

উদা. 1. x^3+8কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$x^3+8=(x)^3+(2)^3$
$=(x+2)(x^2-x.2+2^2)$ [সূত্রের সাহায্যে]
$=(x+2)(x^2-2x+4).$

উদা. 2. $27m^3-8n^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$27m^3-8n^3=(3m)^3-(2n)^3$
$=(3m-2n)\{(3m)^2+3m.2n+(2n)^2\}$
$=(3m-2n)(9m^2+6mn+4n^2)$

উদা. 3. $x^3+3x^2y+3xy^2+2y^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$x^3+3x^2y+3xy^2+2y^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+y^3$
$=(x+y)^3+y^3$
$=(x+y+y)\{(x+y)^2-(x+y)y+y^2\}$

$=(x+2y)(x^2+2xy+y^2-xy-y^2+y^2)$
$=(x+2y)(x^2+xy+y^2)$

উদা. 4. $8(a+b)^3-27(b+c)^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$8(a+b)^3-27(b+c)^3=\{2(a+b)\}^3-\{3(b+c)\}^3$
$=(2a+2b)^3-(3b+3c)^3$
$=\{(2a+2b)-(3b+3c)\}\{(2a+2b)^2$
$+(2a+2b)(3b+3c)+(3b+3c)^2\}$
$=(2a+2b-3b-3c)(4a^2+8ab+4b^2+6ab$
$+6b^2+6ca+6bc+9b^2+18bc+9c^2)$
$=(2a-b-3c)(4a^2+19b^2+9c^2+14ab+24bc+6ca)$

উদা. 5. $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6+a^3b^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6+a^3b^3$
$=(a^2)^3+3.(a^2)^2.b^2+3.a^2.(b^2)^2+(b^2)^3+(ab)^3$
$=(a^2+b^2)^3+(ab)^3$
$=(a^2+b^2+ab)\{(a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)ab+(ab)^2\}$
$=(a^2+ab+b^2)(a^4+2a^2b^2+b^4-a^3b-ab^3+a^2b^2)$
$=(a^2+ab+b^2)(a^4-a^3b+3a^2b^2-ab^3+b^4)$

উদা. 6. $m^3-n^3-m(m^2-n^2)+n(m-n)^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$m^3-n^3-m(m^2-n^2)+n(m-n)^2$
$=(m-n)(m^2+mn+n^2)-m(m+n)(m-n)$
$+n(m-n)(m-n)$
$=(m-n)\{m^2+mn+n^2-m(m+n)+n(m-n)\}$
$=(m-n)(m^2+mn+n^2-m^2-mn+mn-n^2)$
$=(m-n).mn$
$=mn(m-n).$

প্রশ্নমালা 16

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. a^3+8
2. $8x^3+1$
3. a^3+27b^3
4. $8m^3+27n^3$
5. x^3+64y^3
6. $8p^3+343q^3$
7. $a^3b^3+c^3$
8. $192a^3+3$
9. $8am^3+27an^3p^3$
10. $343x^3+512y^3$
11. $729a^3b^3c^3+1000m^3n^3p^3$
12. $16a^4x^3+54ay^3$
13. $1-8a^3$
14. $64a^3-b^3$
15. $125x^3-216y^3$
16. m^4-8m
17. a^6-b^6
18. $b^3c^3-8d^3$
19. $27m^3-64n^3p^3$
20. $216m^3-343n^3$
21. $729a^3b^3c^3-125$
22. $(a-2b)^3+c^3$
23. $m^3-(n-p)^3$
24. $(2a^3-b^3)^3-b^9$
25. $8m^3+12m^2n+6mn^2+2n^3$
26. $(p+q)^3-(p-q)^3$
27. x^3+3x^2+3x+2
28. $8(x+y)^3+27(y+z)^3$
29. $1+9x+27x^2+28x^3$
30. $8-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$
31. $8x^3+12x^2+6x-y^3+9y^2-27y+28$
32. $m^3+n^3-m(m^2-n^2)+n(m+n)^2$

পঞ্চম অধ্যায়

দ্বিঘাত রাশির মধ্যসহগকে বিশ্লেষণের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয়

কোন একটি অক্ষর যুক্ত (মনে কর x) রাশির যদি সর্বোচ্চ ঘাত 2 থাকে, তবে সেই রাশিকে দ্বিঘাত রাশি বলা হয়। যেমন x^2+3x+2 এই রাশিতে xএর সর্বোচ্চ ঘাত 2 ; সুতরাং এটি একটি দ্বিঘাত রাশি। এর তিনটি পদের সহগ যথাক্রমে 1, 3, 2. এবার এই মধ্য সহগ 3-কে বিশ্লেষণ করে কিরূপে রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় তা লক্ষ্য কর। এই সহগটিকে এমন দুটি অংশে বিশ্লেষণ করতে হবে যাদের গুণফল, প্রথম ও তৃতীয় সহগের গুণফলের সমান হয়। এই কাজটি পর্যবেক্ষণের সাহায্যে করতে হবে। বর্তমান উদাহরণে মধ্যসহগ $3=1+2$ এবং 3এর এই বিশ্লেষিত দুটি অংশের গুণফল$=1.2=2=$প্রথম ও তৃতীয় সহগদ্বয়ের বা প্রান্তিক সহগদ্বয়ের গুণফল। এটাই মূল পদ্ধতি। এবার কাজটি কি করে হল, তা দেখ।

$$
\begin{aligned}
x^2+3x+2 &= x^2+(1+2)x+2 \\
&= x^2+x+2x+2 \\
&= x(x+1)+2(x+1) \\
&= (x+1)(x+2)
\end{aligned}
$$

মন্তব্য : (i) উপরের এই পদ্ধতিটির সার কথা নিচের বীজগণিতীয় গুণফলের মধ্যে সহজেই দেখতে পাওয়া যায় :

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

(ii) রাশিটিকে ঘাতের অধঃক্রম বা উর্ধ্বক্রমে সাজালে যেটি মধ্যপদ হবে তার সহগকেই বিশ্লেষণ করতে হবে।

উদা. 1. $x^2+11x+24$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

এখানে মধ্যসহগ 11কে $11=3+8=2+9=4+7$ ইত্যাদি নানা ভাবেই লেখা যায়। কিন্তু আমরা কেবল প্রথম বিশ্লেষণটি গ্রহণ

করব কারণ $3\times 8=24$ এবং তা প্রান্তিক সহগদ্বয়ের গুণফলের সমান।

$$
\begin{aligned}
\text{অতএব, } x^2+11x+24 &= x^2+(3+8)x+24 \\
&= x^2+3x+8x+24 \\
&= x(x+3)+8(x+3) \\
&= (x+3)(x+8)
\end{aligned}
$$

মন্তব্য ঃ উপরের মধ্যসহগ বিশ্লেষণের পরিবর্তে; প্রান্তিক সহগ-দ্বয়ের গুণফল, কোন্ কোন্ সংখ্যাকে গুণ করলে পাওয়া যায়, তা প্রথমতঃ বের করে এদের মধ্যে কোন্ কোন্ সংখ্যার সমষ্টি=মধ্য সহগ, তা সহজেই পাওয়া যাবে। যেমন পূর্ব উদাহরণে প্রান্তিক সহগদ্বয়ের গুণফল$=24$; এখন $24=1\times 24=2\times 12=3\times 8=4\times 6$ ঃ স্পষ্টতঃই 3 ও 8এর সমষ্টি=মধ্যসহগ 11 ; এ প্রকার পর্যবেক্ষণের সাহায্যেও মধ্যসহগ বিশ্লেষণ করা যেতে পারে।

উদা. 2. $x^2-8x+15$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে মধ্যসহগ$=-8$ এবং এর সঠিক বিশ্লেষণ হবে $(-3)+(-5)$, কারণ $(-3)\times(-5)=15=$প্রান্তিক সহগদ্বয়ের গুণফল।

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad x^2-8x+15 &= x^2-(3+5)x+15 \\
&= x^2-3x-5x+15 \\
&= x(x-3)-5(x-3) \\
&= (x-3)(x-5)
\end{aligned}
$$

উদা. 3. $x^2+9x-36$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে মধ্যসহগ 9কে এরূপ দুটি অংশে বিশ্লেষণ করতে হবে, যাদের গুণফল$=-36$ হয় এবং এটা সহজেই বুঝা যাচ্ছে যে অংশদ্বয়ের একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হবে। পর্যবেক্ষণের সাহায্যে দেখা যায়, $9=12+(-3)$ নির্ণেয় মধ্যসহগ বিশ্লেষণ।

$$\therefore \quad x^2+9x-36=x^2+(12-3)x-36$$
$$=x^2+12x-3x-36$$
$$=x(x+12)-3(x+12)$$
$$=(x+12)(x-3)$$

উদা. 4. $x^2-3x-28$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে মধ্যসহগ -3কে এরূপ দুটি অংশে বিশ্লেষণ করতে হবে যাদের সমষ্টি -3 এবং গুণফল -28; এখানেও অংশদ্বয়ের একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হবে। পর্যবেক্ষণের সাহায্যে এখানে দেখা যাচ্ছে, $-3=4+(-7)$ নির্ণেয় মধ্যসহগ বিশ্লেষণ।

$$\therefore \quad x^2-3x-28=x^2+(4-7)x-28$$
$$=x^2+4x-7x-28$$
$$=x(x+4)-7(x+4)$$
$$=(x+4)(x-7)$$

উদা. 5. $a^2+8ab+15b^2$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

(এরূপ রাশিকে a-র সম্পর্কে একটি দ্বিঘাত রাশি হিসেবে ধরে নিলে সুবিধা হবে।)

এখানে মধ্যসহগ$=8=5+3$

আবার প্রান্তিক সহগদ্বয়ের গুণফল$=15=5\times3$

$$\therefore \quad a^2+8ab+15b^2=a^2+(5+3)ab+15b^2$$
$$=a^2+5ab+3ab+15b^2$$
$$=a(a+5b)+3b(a+5b)$$
$$=(a+5b)(a+3b)$$

উদা. 6. $p^2-9pq+18q^2$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এক্ষণে মধ্যসহগ$=-9=(-3)+(-6)$

আবার প্রান্তিক সহগদ্বয়ের গুণফল$=18=(-3)\times(-6)$

$$\therefore \quad p^2-9pq+18q^2=p^2-9pq+18q^2$$
$$=p^2-(3+6)pq+18q^2$$
$$=p^2-3pq-6pq+18q^2$$

$$=p(p-3q)-6q(p-3q)$$
$$=(p-3q)(p-6q)$$

উদা. 7. $(x+y)^2-7(x+y)-18$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $x+y=a$ ধরলে,

প্রদত্ত রাশি $=a^2-7a-18$

$=a^2+(-9+2)a-18$ [পর্যবেক্ষণ দ্বারা]

$=a^2-9a+2a-18=a(a-9)+2(a-9)$

$=(a-9)(a+2)=(x+y-9)(x+y+2)$

[aর মান বসিয়ে]

উদা. 8. a^4-3a^2-4-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=a^4-3a^2-4$

$=a^4-4a^2+a^2-4$

$=a^2(a^2-4)+1(a^2-4)$

$=(a^2-4)(a^2+1)$

$=\{(a)^2-(2)^2\}(a^2+1)$

$=(a-2)(a+2)(a^2+1)$

মন্তব্য : লক্ষ্য কর, এক্ষেত্রে রাশিটিতে যদিও a-র ঘাত 4, কিন্তু রাশিটি a^2এর দ্বিঘাত।

উদা. 9. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

$=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

$=(a+7)(a+15)+15$ [$x^2+8x=a$ ধরে]

$=a^2+22a+105+15$

$=a^2+22a+120$

$=a^2+12a+10a+120$ [পর্যবেক্ষণ দ্বারা মধ্য সহগ বিশ্লেষণ করে]

$=a(a+12)+10(a+12)$

$=(a+12)(a+10)$

$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$

[a-র মান বসিয়ে]

$=(x\ +2x+6x+12)(x^2+8x+10)$

$=\{x(x+2)+6(x+2)\}(x^2+8x+10)$

$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$

মন্তব্য : এখানে প্রথম চারিটি উৎপাদককে দুটি দুটি করে জোড় বাঁধা হয়েছে এমনভাবে, যাতে উভয়ক্ষেত্রে গুণফলের প্রথম দুটি পদ (x-সম্বলিত দুটি পদ) একই হয়।

প্রশ্নমালা 17

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. x^2+4x+3
2. x^2+5x+6
3. $x^2+7x+10$
4. a^2+3a+2
5. $a^2+7a+12$
6. $a^2+10a+24$
7. $m^2+11m+24$
8. $p^2+14p+48$
9. $60+19x+x^2$
10. $x^2-7x+12$
11. $z^2-9z+14$
12. $x^2-16x+39$
13. $a^2-12a+35$
14. $m^2-18m+65$
15. $x^2-15x+54$
16. $a^2+2a-35$
17. $c^2+12c-45$
18. $x^2+5x-36$
19. $p^2+6p-16$
20. x^2+x-56
21. x^2-x-6
22. $a^2-2a-35$
23. $x^2-4x-21$
24. $x^2-3x-28$
25. $m^2-21m-72$
26. $a^2-a-110$
27. $b^2-14b-51$
28. $x^2-4x-117$
29. $a^2-2a-63$
30. $x^2-16x+63$
31. m^2+m-72

32. $156-25a+a^2$
33. $x^2+8x-105$
34. $p^2+2p-143$
35. $a^2-23a+60$
36. $1-5x-36x^2$
37. $x^2+24x-81$
38. $a^2-13a-90$
39. $x^2-49x-102$
40. $80+11x-x^2$
41. a^4+4a^2-5
42. x^4-9x^2+20
43. x^4+6x^2+9
44. x^6-10x^3+16
45. a^6+7a^3-8
46. m^4-2m^2-35
47. $a^2+ab-12b^2$
48. $x^2-xy-210y^2$
49. $m^2+2mn-35n^2$
50. $p^2-16pq+39q^2$
51. $x^2+20xy-96y^2$
52. $a^2+3ab-40b^2$
53. $(x+y)^2-(x+y)-6$
54. $(a^2+2a)^2-(a^2+2a)-2$
55. $(x^2-2x)^2+5(x^2-2x)-36$
56. $(m^2+2m)^2-21(m^2+2m)-72$
57. $(p^2-3q)^2-16(p^2-3q)+63$
58. $(x^2-8x)^2-29(x^2-8x)+180$
59. $(x+1)(x+9)(x+5)^2+63$
60. $(x-1)(x+3)(x-2)(x-6)+96.$

$acx^2+(ad+bc)x+bd$ এর আকারে লিখিত রাশির উৎপাদক নির্ণয়:

এই আকারের রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য মধ্যসহগী বিশ্লেষণ পদ্ধতির প্রয়োগ করা যায়।

$$\begin{aligned}
&acx^2+(ad+bc)x+bd\\
&=acx^2+(ad+bc)x+bd\\
&=acx^2+adx+bcx+bd\\
&=ax(cx+d)+b(cx+d)\\
&=(cx+d)(ax+b)\\
&=(ax+b)(cx+d)
\end{aligned}$$

মন্তব্য ঃ এরূপ দ্বিঘাত রাশিকে সাধারণ ভাবে px^2+qx+r আকারেও প্রকাশ করা হয়ে থাকে।

উদা. 1. $3x^2+7x+4$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে মধ্য সহগ$=7$; এই মধ্য সহগ 7কে এমন দুই অংশে বিশ্লেষণ করতে হবে, যাদের গুণফল$=$প্রান্তিক সহগদ্বয়ের গুণফলের সমান; অর্থাৎ $3.4=12$. পর্যবেক্ষণের সাহায্যে দেখা যায়, $7=3+4$ এবং $3.4=12$.

প্রদত্ত রাশি$=3x^2+(3+4)x+4$

$=3x^2+3x+4x+4$

$=3x(x+1)+4(x+1)$

$=(x+1)(3x+4)$.

উদা. 2. $5x^2+6x-8$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে মধ্যসহগ 6কে এমন দুই অংশে বিশ্লেষণ করতে হবে, যাদের গুণফল$=5\times(-8)=-40$; স্পষ্টতঃই বুঝা যাচ্ছে যে বিশ্লেষিত অংশদ্বয়ের একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হবে। পর্যবেক্ষণের সাহায্যে দেখা যায়, $6=10+(-4)$ এবং যাদের গুণফল$=10\times(-4)=-40=$প্রান্তিক সহগদ্বয়ের গুণফল

$=5\times(-8)$

প্রদত্ত রাশি$=5x^2+6x-8$

$=5x^2+(10-4)x-8$

$=5x^2+10x-4x-8=5x(x+2)-4(x+2)$

$=(x+2)(5x-4)$

উদা. 3. $6x^2-5x-6$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে মধ্যসহগ বিশ্লেষণের সঠিক ইঙ্গিত সহজে পাওয়া যাবে প্রান্তিক সহগদ্বয়ের গুণফল থেকে।

প্রান্তিক সহগদ্বয়ের গুণফল$=6\times(-6)$

$=-36=(-9)\times(4)$

এবং $-9+4=-5$

$$\begin{aligned}6x^2-5x-6&=6x^2+(-9+4)x-6\\&=6x^2-9x+4x-6\\&=3x(2x-3)+2(2x-3)\\&=(2x-3)(3x+2)\end{aligned}$$

উদা. 4. $13a^2-20ab+7b^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে মধ্যপদগ $=-20$, -20কে এমন দুই অংশে বিশ্লেষণ করতে হবে যাদের গুণফল $=13\times7=91$; স্পষ্টতঃই অংশদ্বয় উভয়ে ঋণাত্মক হবে। পর্যবেক্ষণের সাহায্যে বুঝা যাচ্ছে যে

$-20=(-13)+(-7)$ এবং $(-13)\times(-7)=91$.

$$\begin{aligned}13a^2-20ab+7b^2&=13a^2+(-13-7)ab+7b^2\\&=13a^2-13ab-7ab+7b^2\\&=13a(a-b)-7b(a-b)\\&=(a-b)(13a-7b)\end{aligned}$$

উদা. 5. $3(a^2+2a)^2-22(a^2+2a)+40$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=3(a^2+2a)^2-22(a^2+2a)+40$

$=3x^2-22x+40$ $\quad$ [$a^2+2a=x$ ধরে]

$=3x^2+(-12-10)x+40$ [পর্যবেক্ষণের সাহায্যে]

$=3x^2-12x-10x+40$

$=3x(x-4)-10(x-4)$

$=(x-4)(3x-10)$

$=(a^2+2a-4)\{3(a^2+2a)-10\}$

$=(a^2+2a-4)(3a^2+6a-10)$

প্রশ্নমালা 18

1. $2a^2+5a+2$
2. $3x^2+8x+5$
3. $3a^2+14a+8$
4. $2a^2+9a+4$
5. $2m^2+7m+6$
6. $2c^2+7c+3$
7. $2p^2+p-15$
8. $6x^2-x-15$
9. $5a^2-4a-9$
10. $9x^2-x-8$
11. $3k^2-22k-25$
12. $2x^2-x-1$
13. $10a^2-27a-28$
14. $6m^2-11mn-10n^2$
15. $9x^2+30x-11$
16. $5a^2-8ab-13b^2$
17. $12p^2+23pq-24q^2$
18. $5a^2-26ab+5b^2$
19. $7a^2+48ab-7b^2$
20. $10x^2+17xy-20y^2$
21. $11a^2+2ab-13b^2$
22. $3x^2-6xy-9y^2$
23. $9p^2-24pq-9q^2$
24. $8a^2+63ab-8b^2$
25. $12x^2-19xy-10y^2$
26. $21a^2-58a+21$
27. $10x+25-3x^2$
28. $14a-3a^2+5$
29. $12+x-6x^2$
30. $6+5a-6a^2$
31. $a^2b^2-10ab-39$
32. $x^2y^2-xy-72$
33. $3a^4-2a^2-5$
34. $8x^6+x^3-9$
35. m^4+m^2-132
36. a^6+13a^3-48
37. p^4-11p^2-152
38. $6a^6+17a^3-45$
39. $3(a+b)^2+5(a+b)+2$
40. $6(x-y)^2-(x-y)-15$
41. $3(x^2+x)^2-22(x^2+x)-25$
42. $2(3x+2y)^2-5(3x+2y)+3$
43. $3(a+b)^2-10(a+b)(a-b)+3(a-b)^2$
44. $5(x^2-y^2)^2-8xy(x^2-y^2)-13x^2y^2$
45. $ax^2+(a^2+1)x+a$
46. $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$

ষষ্ঠ অধ্যায়

গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয়

গ. সা. গু. (গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক):

তোমরা পাটীগণিতে গ. সা. গু. নির্ণয় করেছ। বীজগণিতীয় রাশির গ. সা. গু. নির্ণয়েও পাটীগণিতের সঙ্গে মূলগত কোন পার্থক্য নেই। তোমরা জান দুটি সংখ্যার একই গুণনীয়ক থাকলে, ঐ গুণনীয়ককে সংখ্যা দুটির সাধারণ গুণনীয়ক বলে। যে গুণনীয়ককে আর কোনরূপ গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, তাকে মৌলিক গুণনীয়ক বলে। গুণনীয়ক দিয়ে সংখ্যা দুটি সর্বদাই বিভাজ্য।

দুটি সংখ্যা ধর 18 এবং 24; এখন 18এর গুণনীয়কগুলি হ'ল 1, 2, 3, 6, 9 ও 18 এবং 24এর গুণনীয়কগুলি হ'ল, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; সুতরাং 18 ও 24এর সাধারণ গুণনীয়কগুলি হ'ল 1, 2, 3, 6। এই সাধারণ গুণনীয়কগুলির সবচেয়ে বড় সংখ্যাটি হ'ল 6, সুতরাং 18 এবং 24এর গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক হ'ল 6। লক্ষ্য কর, 6 হ'ল সংখ্যা দুটির মৌলিক গুণনীয়ক 2 ও 3এর গুণফলের সমান।

বীজগণিতের ক্ষেত্রেও প্রায় অনুরূপ নিয়মেই গ. সা. গু. নির্ণয় করা হয়ে থাকে। দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশি অপর কোন বীজগণিতীয় রাশি দিয়ে সম্পূর্ণ বিভাজ্য হলে, শেষোক্ত রাশিটিকে পূর্বোক্ত রাশি দুটি বা রাশিসমূহের **সাধারণ গুণনীয়ক** বা উৎপাদক বলে। দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশির মধ্যে যতগুলি মৌলিক গুণনীয়ক উভয়ের মধ্যে সাধারণ থাকে, ততগুলি মৌলিক গুণনীয়কের গুণফলকে পূর্বোক্ত রাশি দুটির বা রাশিসমূহের **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** বা গ. সা. গু. বলে।

দুটি বীজগণিতীয় রাশি ab^2 এবং a^2bc ধর। ab^2এর গুণনীয়কগুলি হ'ল a, b, b^2, ab, ab^2 এবং a^2bcএর গুণনীয়কগুলি হ'ল a, a^2, b, c, bc, ab, ac, a^2b, a^2c, abc, a^2bc. [1 সংখ্যাটিকে

ধরা হয়নি]। উভয়ের মধ্যে সাধারণ গুণনীয়ক a, b, ab. এই সাধারণ গুণনীয়কগুলির মধ্যে যার মাত্রা সর্বাধিক, তাই রাশিদ্বয়ের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বা গ. সা. গু.। অবশ্যই এখানে ab সর্বাধিক মাত্রা বিশিষ্ট। সুতরাং ab^2 এবং a^2bcএর গ. সা. গু. ab.

আর একটি উদাহরণ লক্ষ কর। মনে কর, $2a^2b^3c^2$, $4a^3b^2c^4$, $6a^4b^4c^3$এর গ. সা. গু. নির্ণয় করতে হবে। সহজেই বুঝতে পারছ এই রাশি তিনটির সাধারণ গুণনীয়কগুলি হ'ল $2, a, b, c, a^2, b^2, c^2, ab, bc\ ca, a^2b, a^2c, b^2c, bc^2, abc, a^2\,bc, ab^2c, abc^2, a^2b^2c^2, 2a^2b^2c^2$, এদের মধ্যে $2a^2b^2c^2$ই সর্বোচ্চ মাত্রা বিশিষ্ট। সুতরাং রাশি তিনটির গ. সা. গু. $2a^2b^2c^2$.

মন্তব্য : লক্ষ করে দেখ, প্রত্যেকটি রাশিই গ. সা. গু. দিয়ে বিভাজ্য।

উদা. 1. $a^3b^3, a^2b^4c, a^4\ b^3\ c^2$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এখানে a-র সর্বোচ্চ ঘাত, যা তিনটি রাশির মধ্যে আছে তা হল a^2

b-র " " " " " " " " b^3

c-তিনটি রাশির কোনটিতেই উপস্থিত নেই।

সুতরাং সর্বোচ্চ মাত্রা বিশিষ্ট রাশি যা, প্রদত্ত তিনটি রাশির মধ্যেই উপস্থিত, তা হ'ল a^2b^3.

$\therefore$ রাশি তিনটির গ. সা. গু. $= a^2b^3$

উদা. 2. $12ab^2x^3$, $21\,a^2c^2x^2$ $9\,c^3x^3y^3$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$12ab^2x^3 = 2^2\times3\times a\times b^2\times x^3$$
$$21a^2c^2x^2 = 3\times7\times a^2\times c^2\times x^2$$
$$9c^3x^3y^3 = 3^2\times c^3\times x^3\times y^3$$

সহজেই দেখা যাচ্ছে রাশি তিনটির মধ্যে 3 এবং x এই মৌলিক গুণনীয়ক দুটিই সাধারণ। 3এর সর্বোচ্চ ঘাত যা তিনটি রাশির মধ্যেই

বর্তমান তা হ'ল 1 এবং xএর সর্বোচ্চ ঘাত যা তিনটি রাশির মধ্যেই বর্তমান তা হ'ল x^2.

সুতরাং নির্ণেয় গ. সা. গু.$=3x^2$

মন্তব্য : লক্ষ কর, আমরা 2, a, b, c, yএর কোন ঘাত-কেই গ্রহণ করিনি; কারণ এরা কেউ তিনটি রাশির মধ্যে সাধারণ নয়।

প্রশ্নমালা 19

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. a^2b, b^2c
2. xy, x^3y^2
3. m^3n^2, m^2n^3
4. $4a^3b^2, 8a^2b^3$
5. $2pq^2, 8p^4q^3$
6. $7, 14a^4b$
7. $3a^3b^2c, 6ab^2c^3$
8. $8xyz, 2x^2ya$
9. $6xy^2z^3, 9x^2y^4z^5$
10. $7m^3np^4, 21m^2n^5p^3$
11. $5abxy, 25ab^2y^3$
12. $12a^6x^5y^6, 16a^3x^4y^5$
13. $2ab, 4bc, 6b^2$
14. m^3, m^2n, mp^2
15. a^2b, ab^2, a^2b^2
16. $3a^2x^2, 6axy, 3ay^2$
17. $p^2, 2p^2q^2, 3p^3q$
18. $15a^3, 45a^2b, 25b^4$
19. $3x^2y^2z^2, 6x^3y^2z^4, 18x^4y^3z^3$
20. $16a^2b^3x^4y^5, 40a^3b^2x^3y^4, 24a^4b^5x^6y^4$
21. $12m^3n^4l, 32m^2l^3n, 28mn^3$
22. $24a^2bc^5, 56ab^2c, 72a^3c^2$
23. $25bc^4d^3, 35b^2c^5, 45c^2d$
24. $35p^3q^2r^4, 49p^2q^4r^3, 63p^4q^3r^5$
25. $70a^3b^2c, 42a^2bc^2, 105ab^3c^3$
26. $37a^7b^5c^2, 111a^5b^3c^4, 148a^8b^6c^5$
27. $27a^5b^4c^3x^2, 81a^3b^4c^2x^4, 108a^2c^4x^3y^2, 117a^4c^3y^3$.
28. $75x^4y^3z^3d^6, 90x^3y^5z^6d^4, 105x^6y^4z^3d^5, 135x^5y^4z^4d^6$

উৎপাদকের সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয় :

যে সকল মিশ্র বীজগণিতীয় রাশিকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, তাদেরও গ. সা. গু. পূর্ব প্রদর্শিত নিয়মে নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. a^2b+ab^2 ও a^3b-ab^3-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=a^2b+ab^2=ab(a+b)$

দ্বিতীয় রাশি $=a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2)=ab(a+b)(a-b)$

যেহেতু $a, b, a+b$ উভয় রাশির মৌলিক সাধারণ গুণনীয়ক, সুতরাং রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $=ab(a+b)$

উদা. 2. $x^4y-2x^3y^2+x^2y^3$ এবং $x^5y-x^2y^4$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=x^4y-2x^3y^2+x^2y^3$
$=x^2y(x^2-2xy+y^2)$
$=x^2y(x-y)^2$

দ্বিতীয় রাশি $=x^5y-x^2y^4$
$=x^2y(x^3-y^3)$
$=x^2y(x-y)(x^2+xy+y^2)$

নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^2y(x-y)$

উদা. 3. $2x^2+3x-2$ ও $2x^2-9x+4$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=2x^2+3x-2=2x^2+4x-x-2$
$=2x(x+2)-1(x+2)$
$=(x+2)(2x-1)$

দ্বিতীয় রাশি $=2x^2-9x+4=2x^2-8x-x+4$
$=2x(x-4)-1(x-4)$
$=(x-4)(2x-1)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=(2x-1)$

উদা. 4. $48(a^2+ab-2b^2)$ ও $60(2a^2+3ab-2b^2)$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=48(a^2+ab-2b^2)=2^4\times3(a^2+2ab-ab-2b^2)$
$=2^4\times3\{a(a+2b)-b(a+2b)\}$
$=2^4\times3(a-b)(a+2b)$

দ্বিতীয় রাশি $= 60(2a^2+3ab-2b^2)$

$= 2^2\times3\times5(2a^2+4ab-ab-2b^2)$

$= 2^2\times3\times5\{2a(a+2b)-b(a+2b)\}$

$= 2^2\times3\times5(a+2b)(2a-b)$

নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2^2\times3(a+2b) = 12(a+2b)$

মন্তব্য : রাশি দুটির সহগ সংখ্যা দুটিকে (48 ও 60) পৃথক করে নিয়ে পাটীগণিতের নিয়মে তাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করলেও অনেক সময় সুবিধা হবে।

উদা. 5. x^2+3x+2, $3x^2+x-2$ ও $2x^3-x^2-3x$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= x^2+3x+2 = x^2+2x+x+2$

$= x(x+2)+1(x+2)$

$= (x+2)(x+1)$

দ্বিতীয় রাশি $= 3x^2+x-2 = 3x^2+3x-2x-2$

$= 3x(x+1)-2(x+1)$

$= (x+1)(3x-2)$

তৃতীয় রাশি $= 2x^3-x^2-3x = x(2x^2-x-3)$

$= x(2x^2-3x+2x-3)$

$= x\{x(2x-3)+1(2x-3)\}$

$= x(x+1)(2x-3)$

যেহেতু তিনটি রাশির মধ্যে $(x+1)$-ই কেবল মৌলিক সাধারণ গুণনীয়ক, সুতরাং নির্ণেয় গ. সা. গু. $= (x+1)$

উদা. 6. $3x^2-2x-8$ ও $10+x-3x^2$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 3x^2-2x-8$

$= 3x^3-6x+4x-8$

$= 3x(x-2)+4(x-2)$

$= (x-2)(3x+4)$

দ্বিতীয় রাশি$=10+x-3x^2$

$=10+6x-5x-3x^2$

$=2(5+3x)-x(5+3x)$

$=(5+3x)(2-x)$

এখানে লক্ষ কর, আপাতদৃষ্টিতে প্রথম রাশি এবং দ্বিতীয় রাশির উৎপাদক দুটির মধ্যে কোন সাধারণ উৎপাদক নেই। কিন্তু দ্বিতীয় রাশির উৎপাদক $(2-x)$ থেকে যদি -1 একটি উৎপাদক নেওয়া হয় তবে,

দ্বিতীয় রাশি$=-(5+3x)(x-2)$ হবে,

সেক্ষেত্রে নির্ণেয় গ. সা. গু. হবে $(x-2)$.

আবার অপর পক্ষে প্রথম রাশির উৎপাদক $(x-2)$ থেকে যদি -1 একটি উৎপাদক নেওয়া হয়, তবে

প্রথম রাশি$=-(2-x)(3x+4)$ হবে,

তখন নির্ণেয় গ. সা. গু. হবে $(2-x)$

সুতরাং প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $(x-2)$ বা $(2-x)$ যে কোন একটি হতে পারে।

মন্তব্য : কোন দুটি বা ততোধিক রাশির গ. সা. গু. $(x-a)$ হলে তাদের গ. সা. গু. $(a-x)$ও হতে পারে।

প্রশ্নমালা 20

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $a(b+c)^2, a^2(b+c)$
2. $x^2+xy, xy+y^2$
3. $a^2-b^2, (a+b)^2$
4. $a^2+ab, ac+bc$
5. a^2-b^2, a^3-b^3
6. c^2-d^2, c^2-cd
7. $4x^2-1, 2x^2+x$
8. $3a^2(b+c)^2, 6a(b+c)$
9. $a^2-2ab, 2ab-4b^2$
10. a^3-3a^2b, a^2-9b^2
11. $(x-1)^3, x^3-1$
12. $ax(a-x)^3, 2a^2x(a-x)^2$
13. $a^3-b^3, a^3-a^2b+ab^2-b^3$
14. $x^2-y^2, x^3-y^3, 3x^2-5xy+2y^2$

15. a^2-2a-3, a^2+5a+4
16. a^2-1, a^3-1, a^2+a-2
17. $8(x^2-4), 12(x^3+8), 36(x^2-3x-10)$
18. $x^3-3x^2-10x, x^4-8x^3+15x^2$
19. $x^2-x-2, x^3+1, (x+1)^2$
20. $c^2-c, (c-1)^2, c^3-1$
21. $p^2+7p-18, p^2+10p+9$
22. $m^2-3m-18, m^2+5m+6$
23. $x^3-x^2-42x, \quad x^4-49x^2$
24. $3a^2+7a-6, 2a^2+7a+3$
25. $x^2+3xy+2y^2, x^2+5xy+6y^2$
26. $a^3-3a^2-10a, a^3+6a^2+8a, a^4-5a^3-14a^2$
27. $24(x^3+2x^2a+2xa^2+a^3), 32(2x^3+5x^2a+5xa^2+2a^3)$
28. $27(x^4-2ax^3-8a^2x^2), 45(x^5-ax^4-6a^2x^3)$
29. $a^2+b^2-c^2+2ab, a^2-b^2-c^2+2bc$
30. $x^3-16x, 2x^3+9x^2+4x, 2x^3+x^2-28x.$

ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয় :

পাটীগণিতে দুই বা ততোধিক রাশির গ. সা. গু. যেরূপে ভাগ পদ্ধতিতে নির্ণয় করা হয়ে থাকে, সেই একই পদ্ধতি বীজগণিতের ক্ষেত্রেও প্রয়োগ করা যায়।

দুটি রাশির একটি দিয়ে অপরটিকে ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকবে, তা দিয়ে প্রথম ভাজকটিকে আবার ভাগ করতে হবে। আবার এই ভাগপ্রক্রিয়ায় যে ভাগশেষ থাকবে তা দিয়ে দ্বিতীয় ভাজকটিকে ভাগ করতে হবে। এভাবে অগ্রসর হবার পর যখন আর কোন ভাগশেষ থাকবে না, তখন শেষ ভাজকটিই রাশি দুটির গ. সা. গু. হবে। দুটি রাশির পরিবর্তে তিনটি রাশি থাকলে, প্রথমতঃ যে কোন দুটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করতে হবে। এ রাশি দুটির গ. সা. গু.-কে

ভাজক এবং তৃতীয় রাশিটিকে ভাজ্য ধরে আগের মত গ. সা. গু. নির্ণয় করতে হবে। ভাগ প্রক্রিয়া সম্পন্ন করার সময় ভাগের সাধারণ নিয়ম মেনে চলতে হবে। অর্থাৎ ভাজ্য ও ভাজক উভয় রাশিকে যে কোন একটি অক্ষরের ঘাতের উর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে সাজিয়ে নিতে হবে।

মন্তব্য : গ. সা. গু. নির্ণয়ে সাধারণতঃ উৎপাদকে বিশ্লেষণ পদ্ধতিই প্রয়োগ করা হয়ে থাকে। কিন্তু কোন কোন ক্ষেত্রে রাশিকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না। সে সব ক্ষেত্রেই কেবল ভাগ পদ্ধতি প্রয়োগ করা বিধেয়।

দুটি প্রয়োজনীয় জ্ঞাতব্য বিষয় :

ভাগ প্রক্রিয়ায় গ. সা. গু. নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ভাজক বা ভাজ্যকে মূলরাশির সাধারণ গুণনীয়ক নয় এমন যে কোন সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করা যেতে পারে। যেহেতু এই সংখ্যাটি প্রদত্ত কোন রাশিরই সাধারণ গুণনীয়ক নয়, সেজন্য এর ফলে এদের গ. সা. গু.-র কোন পরিবর্তন ঘটবে না।

উদা. 1. x^2+5x+4 এবং x^2+6x+5এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এখানে দুটি রাশিই xএর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজান আছে। রাশি দুটি একই ঘাতযুক্ত হলে যে কোনটিকে ভাজ্য বা ভাজক হিসেবে নেওয়া যেতে পারে।

$$
\begin{array}{l}
x^2+5x+4)\;x^2+6x+5\;(1 \\
\qquad\qquad\quad\;\; x^2+5x+4 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad x+1)\;x^2+5x+4\;(x+4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; x^2+\;x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 4x+4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 4x+4 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x+1$

উদা. 2. $2x^3-10x^2+20x-16$ এবং $3x^3-12x^2+21x-18$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি$=2x^3-10x^2+20x-16$

দ্বিতীয় রাশি$=3x^3-12x^2+21x-18$

এখানে উভয় রাশিই xএর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজান আছে। এখানে দ্বিতীয় রাশিটিকে 2 দিয়ে গুণ করলে, দ্বিতীয় রাশির প্রথম পদটি প্রথম রাশির প্রথম পদ দিয়ে বিভাজ্য হবে।

$$
\begin{array}{r}
3x^3-12x^2+21x-18 \\
2 \\
\hline
2x^3-10x^2+20x-16)\;6x^3-24x^2+42x-36\;(3 \\
6x^3-30x^2+60x-48 \\
\hline
6\,|\,6x^2-18x+12 \\
\hline
x^2-3x+2
\end{array}
$$

প্রথম ভাগশেষটির মধ্যে 6 সংখ্যাটি গুণনীয়ক। তাই 6 দিয়ে ভাগ করে নিলে অঙ্কটি কষার সুবিধা হয়।

$$
\begin{array}{r}
x^2-3x+2)\;2x^3-10x^2+20x-16\;(2x-4 \\
2x^3-\;\;6x^2+\;\;4x \\
\hline
-4x^2+16x-16 \\
-4x^2+12x-\;\;8 \\
\hline
4\,|\,4x-8 \\
\hline
x-2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
x-2)\;x^2-3x+2\;(x-1 \\
x^2-2x \\
\hline
-x+2 \\
-x+2 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু.$=x-2$

মন্তব্য : লক্ষ করলে দেখা যাবে প্রথম রাশিটির একটি উৎপাদক 2 এবং দ্বিতীয় রাশির একটি উৎপাদক 3; এই উৎপাদক দুটি বের করে নিলে যা থাকবে, তার একটিকে ভাজ্য এবং অপরটিকে ভাজক ধরে পূর্বের মত এগিয়ে গেলেই হবে, কারণ তখন যে কোন একটির প্রথম পদ অপরটির প্রথম পদ দিয়ে বিভাজ্য হবে।

উদা. 3. $2x^2+5x+2$, $2x^3+5x^2-4x-3$ এবং $6x^3+x^2+3x+2$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথমতঃ প্রথম দুটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করা যাক।

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2+5x+2 & 2x^3+5x^2-4x-3\ (x \\
 & 2x^3+5x^2+2x \\ \hline
-3 & -6x-3 \\ \hline
2x+1 & 2x^2+5x+2\ (x+2 \\
 & 2x^2+x \\ \hline
 & 4x+2 \\
 & 4x+2 \\ \hline
\end{array}
$$

তাহলে প্রথম দুটি রাশির গ. সা. গু. পাওয়া গেল $(2x+1)$ এবার এই $(2x+1)$ এবং প্রদত্ত তৃতীয় রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করতে হবে।

$$
\begin{array}{r|l}
2x+1 & 6x^3+x^2+3x+2\ (3x^2-x+2 \\
 & 6x^3+3x^2 \\ \hline
 & -2x^2+3x+2 \\
 & -2x^2-x \\ \hline
 & 4x+2 \\
 & 4x+2 \\ \hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=2x+1$

উদা. 4. $6a^3-17a^2-5a+6$, $6a^3-5a^2-39+2$ এবং $3a^3-7a^2+4$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথমতঃ প্রথম দুটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করা যাক।

$$
\begin{array}{r|l}
6a^3-17a^2-5a+6 & 6a^3-5a^2-3a+2\ (1 \\
 & 6a^3-17a^2-5a+6 \\ \hline
2 & 12a^2+2a-4 \\ \hline
 & 6a^2+a-2 \\
6a^2+a-2 & 6a^3-17a^2-5a+6\ (a-3 \\
 & 6a^3+a^2-2a \\ \hline
 & -18a^2-3a+6 \\
 & -18a^2-3a+6 \\ \hline
\end{array}
$$

সুতরাং প্রথম দুটি রাশির, গ. সা. গু. $6a^2+a-2$; এবার এই

তৃতীয় রাশির সর্বোচ্চ ঘাত প্রথম দুটি রাশির গ. সা. গু.-এর সর্বোচ্চ ঘাত থেকে বেশী হলেও, তৃতীয় রাশির প্রথম পদের সহগ গ. সা. গু.-এর প্রথম পদের সহগ দিয়ে বিভাজ্য নয়।

এখানে তৃতীয় রাশিটিকে 2 দিয়ে গুণ করে নিলে, এর প্রথম পদ, $6a^2+a-2$এর প্রথম পদ দিয়ে বিভাজ্য হবে।

$$\begin{array}{r|l}
 & 3a^3-7a^2\quad+4 \\
 & \quad 2 \\
6a^2+a-2 & 6a^3-14a^2\qquad+8\ (a-5 \\
 & 6a^3+\ a^2-2a \\
\hline
 & -15a^2+2a+8 \\
 & \quad 2 \\
\hline
 & -30a^2+4a+16 \\
 & -30a^2+5a+10 \\
\hline
 & 3)\ 9a+6 \\
 & \quad 3a+2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3a+2 & 6a^2+a-2\ (2a-1 \\
 & 6a^2+4a \\
\hline
 & -3a-2 \\
 & -3a-2 \\
\hline
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=3a+2$

মন্তব্য : লক্ষ কর, প্রথম দুটি রাশির যে গ. সা. গু. হয়েছে তিনটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয়ে সেই গ. সা. গু.-র মানের পরিবর্তন ঘটেছে।

প্রশ্নমালা 21

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর (ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে) :

1. $a^2+5a+4,\ a^2+6a+5$
2. $x^2+3x+2,\ 3x^2+x-2$
3. $2a^2-5a+3,\ 4a^2-4a-3$
4. $x^2-2x-3,\ x^3-2x^2-2x-3$
5. $a^3-3a-2,\ a^3-4a^2+6a-4$
6. $x^3-7x^2+14x-8,\ x^3-6x^2+11x-6$

7. $a^3-18a+35,\ a^3-21a+20$

8. $x^3-5x^2+7x-3,\ x^3-4x^2+5x-2$

9. $3a^3-13a^2+23a-21,\ 6a^3+a^2-44a+21$

10. $4a^3-11a^2+25a+7,\ 2a^3-5a^2+11a+7$

11. $2y^3-9y^2+9y-7,\ y^3-5y^2+5y-4$

12. $a^3+3a^2-16a+12,\ a^3+a^2-10a+8$

13. $x^3+4x^2+2x-28,\ x^3-21x+34$

14. $a^3+2a^2-19a-20,\ a^3+9a^2+23a+15$

15. $x^3+4x^2-2x-15,\ x^3-21x-36$

16. $6x^2-5x-4,\ 6x^3-5x^2+6x+5,\ 10x^3+11x^2-x-2$

17. $2a^3+7a^2-5a-4,\ a^3+8a^2+11a-20,$
$2a^3+19a^2+49a+20$

18. $x^3+4x^2+4x+1,\ x^3+5x^2+7x+2,$
$x^4+3x^3+2x^2+3x+1$

19. $6x^3+13x^2+x-2,\ 3x^3+14x^2+13x-6$
$15x^3-11x^2+8x-2$

20. $a^3+a^2-7a+2,\ 2a^3-a^2-7a+2,\ a^3-4a^2+4a.$

ল. সা. গু. (লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক)
(উৎপাদকের সাহায্যে নির্ণয়)

কোন একটি রাশি অপর একটি রাশি দিয়ে সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হলে, প্রথমোক্ত রাশিকে শেষোক্ত রাশির গুণিতক বলে। যেমন পাটীগণিতে 24 সংখ্যাটি 2, 3, 4, 6, 8, 12 ইত্যাদি সকলেরই গুণিতক; অনুরূপভাবে বীজগণিতে x^3y রাশিটি x, x^2, xy, x^2y ইত্যাদি রাশির গুণিতক।

যদি কোন রাশি দুই বা ততোধিক রাশির প্রত্যেকটি দিয়ে সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হয়, তা হলে প্রথমোক্ত রাশিকে শেষোক্ত রাশি দুটি বা রাশিসমূহের সাধারণ গুণিতক বলে। যেমন, xy, x^2y, xy^2 এই তিনটি

রাশির একটি সাধারণ গুণিতক x^2y^2 ; কারণ x^2y^2 রাশিটি ঐ তিনটি রাশির প্রত্যেকটি দিয়ে বিভাজ্য।

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)

দুই বা ততোধিক রাশি দিয়ে যে যে রাশি সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য, তাদের মধ্যে সর্বনিম্ন মাত্রাবিশিষ্ট রাশিটিকেই (সহগ সংখ্যা থাকলে সহগ সংখ্যাগুলির ল. সা. গু. যুক্ত) প্রথমোক্ত রাশিগুলির **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক** বা সংক্ষেপে **ল. সা. গু.** বলে।

উপরের তিনটি রাশি xy, x^2y, xy^2. এদের আর একটু বিশ্লেষণ করা যাক। আগেই বলা হয়েছে x^2y^2 এদের একটি সাধারণ গুণিতক। ঐ রাশি তিনটির অন্যান্য সাধারণ গুণিতকও সহজেই লেখা যায়। যেমন, x^3y^2, x^2y^3, x^3y^3, $2x^2y^2$, ax^3y^3 ইত্যাদি। এই সকল সাধারণ গুণিতকগুলির মধ্যে x^2y^2এর মানই সর্বনিম্ন। এটিকেই প্রদত্ত রাশি তিনটির লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা সংক্ষেপে ল. সা. গু. বলে।

একপদবিশিষ্ট রাশিসমূহের ল. সা. গু. নির্ণয় পদ্ধতি :

প্রত্যেকটি রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে উক্ত রাশি মধ্যে সর্বোচ্চ মাত্রাবিশিষ্ট উৎপাদকগুলির ক্রমিক গুণফলই রাশিগুলির ল. সা. গু.।

উদা. 1. a^3bc, $a^2b^3c^2$, ab^2c^3এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

এই রাশিগুলিতে a, b ও cএর বিভিন্ন মাত্রার উৎপাদক আছে। এখানে

a-র সর্বোচ্চ মাত্রাবিশিষ্ট উৎপাদক a^3

b-র সর্বোচ্চ মাত্রাবিশিষ্ট উৎপাদক b^3

c-র সর্বোচ্চ মাত্রাবিশিষ্ট উৎপাদক c^3

সুতরাং রাশি তিনটির ল. সা. গু.$=a^3b^3c^3$

উদা. 2. $4x^2y^4z$, $12x^3yz^5$, $18x^2y^3z^2$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

এই রাশিগুলিতে x, y এবং zএর বিভিন্ন মাত্রাবিশিষ্ট উৎপাদক আছে। এখানে,

xএর সর্বোচ্চ মাত্রা 3

yএর সর্বোচ্চ মাত্রা 4

zএর সর্বোচ্চ মাত্রা 5

আবার সাংখ্য সহগগুলির (4, 12, 18) এর ল. সা. গু. = 36

$\therefore$ রাশি তিনটির ল. সা. গু. $= 36x^3y^4z^5$

প্রশ্নমালা 22

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $2a^2, a^3b$
2. x^2y, y^2z
3. a^3b^2, a^2b^3
4. $8m^3n^2p, 12mn^2p^3$
5. $3x^2yz^2, 5yz^3$
6. ab, bc, ca
7. x^2y, xy^2, yz^2
8. $a^2, 2b^2, 3c^2$
9. a^2bc, ab^2c, abc^2
10. $3m^2np, 9m^3n^2, 15np^3$
11. $4x^2yz^3, 6x^3y^2z^4, 8xyz^2$
12. $13c^3d^2, 26cd^4, 39c^5d$
13. $27a^2b^2c^2, 81b^2x$ [illegible] z^2
14. $5x^2y^2, 10xz^2, 15y$[illegible]z^4
15. $32a^4b^3c, 48abc^5, 16a^4c^3$
16. $21a^4x^3y, 35a^2x^4y, 28a^3xy^4$
17. $4ab, 9a^2c, 3ac, 12a^2c^3$
18. $3a^2x^3, 9x^2b^3, 12c^3y$, [illegible]a^3z^4
19. $9x^2y^4a^5, 12b^3z^5x$, [illegible] $4a^5b^3z^4$
20. $3a^5b^4, 5a^2b^2c, 7abc, 10a$[illegible]

বহুপদবিশিষ্ট রাশির উৎপাদকের সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয় :

বহুপদবিশিষ্ট রাশির প্রত্যেকটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষিত করে পূর্ব পদ্ধতি অনুসরণ করে ল. সা. গু. বের করতে হবে।

উদা. 1. $a^2-b^2, a^3-b^3, (a+b)^2$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

দ্বিতীয় রাশি $=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

তৃতীয় রাশি $=(a+b)^2$

সুতরাং রাশি তিনটির মধ্যে উৎপাদক আছে $a+b$, $a-b$, a^2+ab+b^2 এবং এদের সর্বোচ্চ মাত্রা যথাক্রমে 2, 1, 1

সুতরাং নির্ণেয় ল. সা. গু. $=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)^2$

$=(a^3-b^3)(a+b)^2$.

উদা. 2. $x^5y^2-x^2y^5$ এবং $x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=x^5y^2-x^2y^5=x^2y^2(x^3-y^3)$

$=x^2y^2(x-y)(x^2+xy+y^2)$

দ্বিতীয় রাশি $=x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4$

$=x^2y^2(x^2-2xy+y^2)$

$=x^2y^2(x-y)^2$

এখানে x এর সর্বোচ্চ ঘাত $=2$

y " " " $=2$

$(x-y)$ " " " $=2$

x^2+xy+y^2 " " " $=1$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=x^2y^2(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$

উদা. 3. $4(x^2-4)$, $6(x^2-x-2)$ ও $12(x^2+x-2)$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=4(x^2-4)=4(x+2)(x-2)$

দ্বিতীয় রাশি $=6(x^2-x-2)=6(x^2-2x+x-2)$

$=6\{x(x-2)+1(x-2)\}$

$=6(x-2)(x+1)$

তৃতীয় রাশি $=12(x^2+x-2)=12(x^2+2x-x-2)$

$=12\{x(x+2)-1(x+2)\}$

$=12(x+2)(x-1)$

সহগ সংখ্যা 4, 6, 12এর ল. সা. গু. $=12$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=12(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

উদা. 4. $(x^2+2x)^2$, $2x^4+3x^3-2x^2$ এবং $2x^3-3x^2-14x$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=(x^2+2x)^2=\{x(x+2)\}^2=x^2(x+2)^2$

দ্বিতীয় রাশি $=2x^4+3x^3-2x^2$

$=x^2(2x^2+3x-2)$

$=x^2(2x^2+4x-x-2)$

$=x^2\{2x(x+2)-1(x+2)\}$

$=x^2(x+2)(2x-1)$

তৃতীয় রাশি $=2x^3-3x^2-14x$

$=x(2x^2-3x-14)$

$=x(2x^2-7x+4x-14)$

$=x\{x(2x-7)+2(2x-7)\}$

$=x(x+2)(2x-7)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=x^2(x+2)^2(2x-1)(2x-7)$

উদা. 5. $3a^3-18a^2x+27ax^2$, $4a^4+24a^3x+36a^2x^2$ $6a^4-54a^2x^2$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=3a^3-18a^2x+27ax^2$

$=3a(a^2-6ax+9x^2)$

$=3a\{a^2-2.a.3x+(3x)^2\}=3a(a-3x)^2$

দ্বিতীয় রাশি $=4a^4+24a^3x+36a^2x^2$

$=4a^2(a^2+6ax+9x^2)$

$=4a^2\{a^2+2.a.3x+(3x)^2\}=4a^2(a+3x)^2$

তৃতীয় রাশি $=6a^4-54a^2x^2$

$$=6a^2(a^2-9x^2)$$

$$=6a^2\{a^2-(3x)^2\}=6a^2(a+3x)(a-3x)$$

সহগ সংখ্যা 3, 4, 6 এর ল. সা. গু. $=12$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=12a^2(a+3x)^2(a-3x)^2$

প্রশ্নমালা 23

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর (উৎপাদকের সাহায্যে) :

1. a^3, a^2+2a
2. x^2+x, x^3-x
3. $xy+y^2, x^2+xy$
4. m^2-4, m^2+2m
5. $a(b+c)^2, a^2(b+c)$
6. $a^2+ab, ac+bc$
7. $(x-1)^2, x^3-1$
8. $4(x-y)^2, 6(x^2-y^2), 8(x^3-y^3)$
9. $a^2-b^2, a^3-b^3, a^4-b^4$.
10. $2x^3-x^2-x, (x-1)^2$
11. a^2-2a-3, a^2+5a+4
12. $a^2-3a+2, (a-1)^2, a^4-1$
13. $a^3-3a^2-10a, a^4-8a^3+15a^2$
14. $8(x^2-4), 12(x^3+8), 36(x^2-3x-10)$
15. $3(x^2+xy), 8(xy-y^2), 5(x^2-y^2)$
16. $a^2-ab-2b^2, a^2-5ab+6b^2, a^2-2ab-3b^2$
17. $4a^2b^2, 2a(a^2-b^2), 6a^3b(a^3+b^3)$
18. $a^2-b^2, a^3-b^3, 3a^2-5ab+2b^2$
19. $x^2-xy-2y^2, 2x^2-5xy+2y^2, 2x^2+xy-y^2$
20. $3m^2+5m+2, m^2-m-2, 3m^2-4m-4$
21. $2a^2+3a-2, 3a^2+7a+2, 6a^2-a-1$
22. $3x^2-15x+18, 2x^2+2x-24, 4x^2+36x+80$
23. $a^2-3a+2, a^3+2a^2-3a, a^4+a^3-6a^2$
24. $9a^2-36x^2, 4a^2-4ax+x^2, 2a^2+3ax-2x^2$
25. $15a^3x(a+x)^3, 20ax^3(a-x)^3, 36a^2x^2(a^2-x^2)^2$
26. $x^4+x^2y^2+y^4, x^3y+y^4, (x^2-xy)^3$
27. $ab^4-8ab, a^2b^4+8a^2b, ab^4-4ab^2$
28. $3a^3-18a^2x+27ax^2, 4a^4+24a^3x+36a^2x^2,$ $6a^4-54a^2x^2$
29. $(a^2+2a)^2, 2a^3+3a^2-2a, 2a^4-3a^3-14a^2$
30. $3a^2-5ab-12b^2, a^5-27a^2b^3, 9a^2+24ab+16b^2$

সপ্তম অধ্যায়

ভগ্নাংশ

পাটীগণিতে তোমরা ভগ্নাংশের আলোচনা করেছ। $\frac{3}{10}$ ভগ্নাংশটি সম্বন্ধে তোমাদের স্পষ্ট ধারণা আছে। এখানে লব 3 এবং হর 10, এ দুটি নির্দিষ্ট পূর্ণসংখ্যা। এর পরিবর্তে যদি অনির্দিষ্ট মানের সংখ্যা প্রতীক a এবং b ব্যবহার করা হয় তাহলে $\frac{a}{b}$কে বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ বলা হয় যার লব a এবং হর b এবং ভগ্নাংশটির মান $a \div b$.

যে কোন ভগ্নাংশকে সাধারণত লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করা হয়ে থাকে। এই লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করতে গেলে নিচের নিয়ম-অনুসারে করাই বিধেয়:

1. কোন বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের লব ও হরকে তাদের একটি সাধারণ উৎপাদক দিয়ে ভাগ করলে ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্তন হবে না, অথচ ভগ্নাংশটি আকারে ছোট হবে; যেমন $\frac{ax}{ay}=\frac{x}{y}$. এ ভাবে লব ও হরের প্রত্যেকটি সাধারণ উৎপাদক অপসারিত হলে ভগ্নাংশের যে আকারটি থাকে, তাই ভগ্নাংশের লঘিষ্ঠ আকার। অনেক সময়ই বীজগণিতীয় ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করে নিলে অঙ্ক কষার সুবিধা হয়।

2. পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতেও ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ ক্রিয়ায় ভগ্নাংশগুলিকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করে নিয়ে যোগ বা বিয়োগ প্রক্রিয়া সম্পন্ন করা হয়। যেমন

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{c}+\frac{c}{d}=\frac{acd}{bcd}-\frac{b^2d}{bcd}+\frac{bc^2}{bcd}$$

$$=\frac{acd-b^2d+bc^2}{bcd}$$

3. পাটীগণিতে ও বীজগণিতে ভগ্নাংশের গুণ প্রক্রিয়া একই প্রকার। দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের গুণফল এমন একটি ভগ্নাংশ হবে যার লব, ঐ ভগ্নাংশগুলোর লবের গুণফল এবং হর, ঐ ভগ্নাংশগুলোর হরের গুণফল হবে। যেমন,

$$\frac{ad}{b^2}\times\frac{b^3}{c^3}\times\frac{c^2}{d^2}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}\times\frac{1}{d}=\frac{ab}{cd}$$

এটিই হল ভগ্নাংশ তিনটির গুণফলের লঘিষ্ঠ আকার। লঘিষ্ঠ আকারের গুণফল পেতে হলে গুণ করার আগেই যে কোন লব এবং যে কোন হরের সাধারণ উৎপাদককে অপসারিত করা চলে। এখানে প্রথম ভগ্নাংশের লব এবং তৃতীয় ভগ্নাংশের হরের সাধারণ উৎপাদক d; প্রথম ভগ্নাংশের হর এবং দ্বিতীয় ভগ্নাংশের লবের সাধারণ উৎপাদক b^2 এবং দ্বিতীয় ভগ্নাংশের হর এবং তৃতীয় ভগ্নাংশের লবের সাধারণ উৎপাদক c^2 গুণের আগেই অপসারণ করা হয়েছে।

4. পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতে কোন ভগ্নাংশকে অপর একটি ভগ্নাংশ দিয়ে ভাগ করতে হলে প্রথম ভগ্নাংশটিকে দ্বিতীয় ভগ্নাংশটির অন্যোন্যক দিয়ে গুণ করতে হয়।

[দ্রষ্টব্য : 3এর অন্যোন্যক $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$এর অন্যোন্যক $\frac{5}{3}$, $\frac{a}{b}$এর অন্যোন্যক $\frac{b}{a}$ ইত্যাদি।]

নিচের উদাহরণটি লক্ষ করঃ

$$\frac{a^2c^2}{b^2d^2}\div\frac{bc}{ad}=\frac{a^2c^2}{b^2d^2}\times\frac{ad}{bc}=\frac{a^2c}{b^2d}\times\frac{a}{b}=\frac{a^3c}{b^3d}$$

মন্তব্য : লব এবং হরের সাধারণ উৎপাদককে অপসারণ করার পদ্ধতিকে প্রয়োজন হলে বারবার প্রয়োগ করে যে কোন ভগ্নাংশকে তার লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করা যায়।

তোমরা অবশ্যই স্মরণ রাখবে যে $\frac{x}{x}=1$, কখনই 0 (শূন্য) নয়।

উদা. 1. $\frac{24a^4b^5c^2}{18a^3b^3c^3}$কে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর।

$$\frac{\overset{4}{\cancel{24}}a^4b^5c^2}{\underset{3}{\cancel{18}}a^3b^3c^3}=\frac{4ab^2}{3c}$$

মন্তব্য : এখানে লব এবং হরের সাধারণ উৎপাদক $6, a^3, b^3, c^2$ অপসারণ করা হয়েছে।

উদা. 2. সরল কর : $\frac{a}{bc}-\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$

$$\frac{a}{bc}-\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}=\frac{a^2}{abc}-\frac{b^2}{abc}+\frac{c^2}{abc}=\frac{a^2-b^2+c^2}{abc}$$

উদা. 3. সরল কর :

$$\frac{x^2}{y^2z^2}\times\frac{yz^3}{xa^3}\times\frac{y^4b^3}{xz}\times\frac{a^2}{b^3y^3}$$

এখানে প্রতিটি ভগ্নাংশের লবগুলোর গুণফল, লব্ধ ভগ্নাংশের লব এবং হরগুলোর গুণফল, লব্ধ ভগ্নাংশের হর হবে।

$$\frac{x^2}{y^2z^2}\times\frac{yz^3}{xa^3}\times\frac{y^4b^3}{xz}\times\frac{a^3}{b^3y^3}$$

$$=\frac{x^2\times yz^3\times y^4b^3\times a^3}{y^2z^2\times xa^3\times xz\times b^3y^3}$$

$$=\frac{x^2y^5z^3a^3b^3}{x^2y^5z^3a^3b^3}=1$$

উদা. 4. সরল কর :

$$\frac{5a^3b^3}{8c^2d^2}\div\frac{15a^2d}{12b^2c}\times\frac{4c^4d^2}{3a^2b^4}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{\cancel{5}a^3b^3}{\underset{2}{\cancel{8}}c^2d^2}\times\frac{\overset{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{12}}b^2c}{\underset{3}{\cancel{15}}a^2d}\times\frac{\cancel{4}c^4d^2}{3a^2b^4}$$

$$=\frac{2a^3b^5c^5d^2}{3a^4b^4c^2d^3}=\frac{2bc^3}{3ad}.$$

মন্তব্য : দ্বিতীয় ভগ্নাংশটির অন্যোন্যক নিয়ে গুণ করা হয়েছে। ফলে এটি উদা. 3এর ন্যায় হল। পরবর্তী পর্যায়ে সাধারণ উৎপাদক অপসারণ করা হয়েছে।

উদা. 5. সরল কর :

$$\frac{x-6}{x+2}-\frac{x-4}{x-1}$$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{(x-6)(x-1)-(x-4)(x+2)}{(x+2)(x-1)}$

$$=\frac{(x^2-7x+6)-(x^2-2x-8)}{x^2+x-2}$$

$$=\frac{x^2-7x+6-x^2+2x+8}{x^2+x-2}=\frac{14-5x}{x^2+x-2}$$

উদা. 6. সরল কর :

$$\frac{a-x}{ax}-\frac{a+x}{x^2}+\frac{x}{a^2}+\frac{4a^2+x^2}{4ax^2}$$

প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{4ax(a-x)-4a^2(a+x)+4x^2.x+a(4a^2+x^2)}{4a^2x^2}$$

$$=\frac{4a^2x-4ax^2-4a^3-4a^2x+4x^3+4a^3+ax^2}{4a^2x^2}$$

$$=\frac{4x^3-3ax^2}{4a^2x^2}=\frac{x^2(4x-3a)}{4a^2x^2}=\frac{4x-3a}{4a^2}$$

উদা. 7. সরল কর :

$$\frac{3a^2-9ab}{a^2-ab}\div\frac{a^2-9b^2}{a^2-b^2}$$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{3a^2-9ab}{a^2-ab}\times\frac{a^2-b^2}{a^2-9b^2}$

$$=\frac{3a(a-3b)}{a(a-b)}\times\frac{(a+b)(a-b)}{a^2-(3b)^2}$$

$$=\frac{3(a-3b)}{a-b}\times\frac{(a+b)(a-b)}{(a+3b)(a-3b)}=\frac{3(a+b)}{a+3b}$$

মন্তব্য : যে সমস্ত ভগ্নাংশের লব ও হরকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, সেরূপ বিভিন্ন ভগ্নাংশের মধ্যে সরলীকরণ সহজে সম্পন্ন করা যায়।

উদা. 8. সরল কর :

$$\left(3a-\frac{1}{3a}\right)\div\left(a-\frac{2}{3}-\frac{1}{3a}\right)$$

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{9a^2-1}{3a}\div\dfrac{3a^2-2a-1}{3a}$

$$=\frac{(3a+1)(3a-1)}{3a}\times\frac{3a}{3a^2-2a-1}$$

$$=\frac{(3a+1)(3a-1)}{3a^2-3a+a-1}$$

$$=\frac{(3a+1)(3a-1)}{3a(a-1)+1(a-1)}=\frac{(3a+1)(3a-1)}{(a-1)(3a+1)}$$

$$=\frac{3a-1}{a-1}$$

উদা. 9. সরল কর :

$$\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\div\frac{(x-y)^2+xy}{(x+y)^2-xy}\div\frac{a^2-ax}{a^2-x^2}$$

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\times\dfrac{(x+y)^2-xy}{(x-y)^2+xy}\times\dfrac{a^2-x^2}{a^2-ax}$

$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\times\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\times\frac{(a+x)(a-x)}{a(a-x)}$$

$$=\frac{(x+y)(a+x)}{a(x-y)}$$

উদা. 10. সরল কর :

$$\frac{a^2+a-6}{a^2-1}\times\frac{a^2-3a-4}{a^2-5a+6}\div\frac{a^2-a-12}{a^2-4a+3}$$

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{a^2+a-6}{a^2-1}\times\dfrac{a^2-3a-4}{a^2-5a+6}\times\dfrac{a^2-4a+3}{a^2-a-12}$

$$=\frac{(a-2)(a+3)}{(a+1)(a-1)}\times\frac{(a-4)(a+1)}{(a-3)(a-2)}\times\frac{(a-3)(a-1)}{(a-4)(a+3)}=1$$

উদা. **11.** সরল কর :

$$\left(\frac{5x}{2x-1}-\frac{x-2}{x}\right)\times\left(\frac{2x}{x+2}-\frac{1}{x+2}\right)$$

প্রদত্ত রাশি $=\left\{\frac{5x^2-(x-2)(2x-1)}{x(2x-1)}\right\}\times\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$

$$=\left\{\frac{5x^2-2x^2+5x-2}{x(2x-1)}\right\}\times\frac{2x-1}{x+2}$$

$$=\frac{3x^2+5x-2}{x(2x-1)}\times\frac{2x-1}{x+2}$$

$$=\frac{(x+2)(3x-1)}{x(2x-1)}\times\frac{2x-1}{x+2}=\frac{3x-1}{x}$$

উদা. **12.** সরল কর :

$$\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{2a(a-b)^2}\times\frac{a^2-b^2}{a+2b}\div\frac{a+b}{a^2+ab-2b^2}\div\frac{a^2+b^2}{4a^2}$$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{a^2(a+b)+b^2(a+b)}{2a(a-b)^2}\times\frac{(a+b)(a-b)}{a+2b}$

$$\times\frac{a^2-ab+2ab-2b^2}{a+b}\times\frac{4a^2}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{2a(a-b)^2}\times\frac{(a+b)(a-b)}{a+2b}$$

$$\times\frac{(a-b)(a+2b)}{a+b}\times\frac{4a^2}{a^2+b^2}$$

$$=2a(a+b)$$

প্রশ্নমালা 24

লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর :

1. $\frac{3a^4b^3}{9a^5b}$

2. $\frac{18p^4q^2}{27q^2}$

3. $\frac{12a^4c^3d^2}{28a^3c^4d^3}$

4. $\frac{39a^3x^2y}{9a^2x^3z}$

5. $\dfrac{56x^6y^5z^4}{42x^4y^3z^2}$

6. $\dfrac{74m^3n^3}{111m^2p^4}$

7. $\dfrac{146b^2c^6}{365abc^4}$

8. $\dfrac{27x^5y^3z^6}{18x^6y^2z^4}$

সরল কর ঃ

9. $\dfrac{3ac^2}{5b^3c}\times\dfrac{15b^2c^2}{9a^2b}$

10. $\dfrac{2a^2b}{3b^2c}\times\dfrac{c^4}{3a^3}\div\dfrac{4bc^3}{9a^2}$

11. $\dfrac{3xy^2}{4yz}\times\dfrac{5z^3x}{7x^2y}\div\dfrac{45x^3y^3z}{14xy^3z^2}$

12. $\dfrac{169m^4}{15n}\div\dfrac{156m^2np^5}{25p^3}\times\dfrac{36n^2p^2}{65m^2}$

13. $\dfrac{x^2}{yz}-\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{z^2}{xy}$

14. $\dfrac{b-c}{bc}+\dfrac{c-a}{ca}+\dfrac{a-b}{ab}$

15. $\dfrac{x-2y}{xy}+\dfrac{3y-a}{ay}-\dfrac{3x-2a}{ax}$

16. $\dfrac{x^2+xy}{xy+y^2}$

17. $\dfrac{c^2-2c}{4c^3-8c^2}$

18. $\dfrac{a^2-4b^2}{a^2-2ab}$

19. $\dfrac{(m+2n)^2}{m^3-4mn^2}$

20. $\dfrac{5p^2+30p}{p^2+p-30}$

21. $\dfrac{a+1}{a-2}\times\dfrac{a^2-a-2}{a^2+a}$

22. $\dfrac{a^2}{2x+3}\times\dfrac{6x^2+9x}{4a^4}$

23. $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}\div\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$

24. $\dfrac{a^3-a}{2a^3+6a^2}\times\dfrac{a^2+3a}{a^2-1}$

25. $\dfrac{9m^2-16n^2}{m^2-16}\times\dfrac{m^2-4m}{3m-4n}$

26. $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-2ab+b^2}\times\dfrac{a^2-b^2}{a^2+ab}$

27. $\dfrac{x^2+4x}{x^3-9x}\div\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+x-6}$

28. $\dfrac{x^2+7xy+12y^2}{x^2-y^2}\div\dfrac{x+4y}{x-y}$

29. $\dfrac{a^2-5ab}{a^2-6ab+5b^2}\times\dfrac{a^2-b^2}{a^2+ab}$

30. $\dfrac{p^3+q^3}{p^2-q^2}\times\dfrac{p+q}{p-q}\times\dfrac{p^2-pq}{(p+q)^2}$

31. $\dfrac{m^2+3m}{m^2+4m+3}\div\dfrac{m^2-9}{m^2-2m-3}$

32. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x-12}\times\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-4}$

33. $\dfrac{a^3-8}{a+3}\div\left(\dfrac{a-2}{4a}\times\dfrac{8a^4}{a^2+3a}\right)$

34. $\dfrac{x^4-8x}{2x^2+5x-3}\times\dfrac{2x-1}{x^2+2x+4}\div\dfrac{x^2-2x}{x+3}$

35. $\dfrac{1+8x^3}{(2-x)^2}\times\dfrac{4x-x^3}{1-4x^2}\div\dfrac{(1-2x)^2+2x}{2-5x+2x^2}$

36. $\dfrac{a(a^2-b^2)}{a^2+4ab+3b^2}\div\dfrac{a^2-ab}{a+3b}$

37. $\dfrac{1}{x^2+xy+y^2}\times\dfrac{2x}{x^3+y^3}\times\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{4x^2}$

38. $\dfrac{x(a^2-b^2)}{x^3+y^3}\times\dfrac{x^2-xy+y^2}{ax^2-a^2x}\div\dfrac{2b}{x^2-a^2}\div\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$

অষ্টম অধ্যায়

একটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সরল সমীকরণের সমাধান

কিরূপে একটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সরল সমীকরণ গঠন করা হয় এবং সেই অজ্ঞাত রাশিটির মান কিরূপে নির্ণয় করা হয়, তা তোমরা সপ্তম শ্রেণীতে শিখেছ। সমীকরণ সমাধানের জন্য কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধের সাহায্য নেওয়া হয়। নিচে স্বতঃসিদ্ধগুলো দেওয়া হ'ল :

স্বতঃসিদ্ধ 1.

সমান সমান রাশির সঙ্গে সমান সমান রাশি যোগ করলে, যোগফলগুলো পরস্পর সমান হবে।

স্বতঃসিদ্ধ 2.

সমান সমান রাশি থেকে সমান সমান রাশি বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলো পরস্পর সমান হবে।

স্বতঃসিদ্ধ 3.

সমান সমান রাশিকে সমান সমান রাশি দিয়ে গুণ করলে, গুণফল গুলো পরস্পর সমান হবে।

স্বতঃসিদ্ধ 4.

সমান সমান রাশিকে সমান সমান রাশি দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল-গুলো পরস্পর সমান হবে।

এ সমস্ত স্বতঃসিদ্ধ ছাড়া, সমীকরণের অজ্ঞাতরাশির মাননির্ণয়ে আরও কয়েকটি নিয়ম অনুসরণীয় :

(i) সমীকরণে অজ্ঞাতরাশিটিকে সাধাণত বামপক্ষে রাখা হয়।

(ii) কোন রাশিকে বামপক্ষ থেকে ডানপক্ষে বা,ডানপক্ষ থেকে বামপক্ষে আনতে হলে, চিহ্নের পরিবর্তন করতে হবে। একে পক্ষান্তর প্রক্রিয়া বলা হয়ে থাকে। প্রকৃতপক্ষে এটি স্বতঃসিদ্ধ 1 এবং 2 এর ভিন্ন রূপ।

(iii) যদি সমীকরণের উভয়পক্ষ একটি করে ভগ্নাংশ হয়, তবে বজ্রগুণন করলে উভয় গুণফল সমান হবে। একপক্ষের লবের সঙ্গে অপর পক্ষের হরের গুণকে বজ্রগুণন বলা হয়। যথা—

যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়। তবে বজ্রগুণনের নিয়মে $ad=bc$ হবে। কারণ উভয়পক্ষকে যদি bd দিয়ে গুণ করা যায়। তবে $bd.\frac{a}{b}=bd\frac{c}{d}$, অর্থাৎ $ad=bc$; অর্থাৎ উভয়পক্ষকে উভয়পক্ষের হর দুটির গুণফল দিয়ে গুণ করা হয়েছে। এই গুণ না করে আমরা কোণাকুণি গুণ করেই $ad=bc$ লিখতে পারি। যদি একপক্ষ ভগ্নাংশ এবং অপর পক্ষ পূর্ণসংখ্যাবিশিষ্ট হয়, তা হলেও এ নিয়ম প্রয়োগ করা যেতে পারে। কারণ যে কোন পূর্ণসংখ্যাকে ভগ্নাংশ হিসাবে ধরা যেতে পারে, যার হরের মান 1 ; যেমন $c=\frac{c}{1}$; যদি $\frac{a}{b}=c$ হয়, তবে $\frac{a}{b}=\frac{c}{1}$ বা, $a=bc$.

সহজতর সরল সমীকরণের সমাধান :

উদা. 1. সমাধান কর : $14(x-2)+3(x+5)=3(x+8)+5$

$$14(x-2)+3(x+5)=3(x+8)+5$$

বা, $14x-28+3x+15=3x+24+5$

বা, $17x-13=3x+29$

বা, $17x-3x=29+13$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $14x=42$

বা, $x=\frac{42}{14}=3.$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x = 3$

উদা. 2. সমাধান কর :

$$\frac{x-4}{3}+\frac{2x-3}{35}=\frac{5x-32}{9}-\frac{x+9}{28}$$

$$\frac{x-4}{3}+\frac{2x-3}{35}=\frac{5x-32}{9}-\frac{x+9}{28}$$

বা, $\frac{2x-3}{35}+\frac{x+9}{28}=\frac{5x-32}{9}-\frac{x-4}{3}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{8x-12+5x+45}{140}=\frac{5x-32-3x+12}{9}$

বা, $\frac{13x+33}{140}=\frac{2x-20}{9}$

বা, $140(2x-20)=9(13x+33)$ [বজ্রগুণন করে]

বা, $280x-2800=117x+297$

বা, $280x-117x=297+2800$

বা, $163x=3097$ বা, $x=\frac{3097}{163}=19$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=19$

উদা. 3. সমাধান কর : $x(x+1)+x(x+2)=2x^2+15$

$x(x+1)+x(x+2)=2x^2+15$

বা, $x^2+x+x^2+2x=2x^2+15$

বা, $2x^2+3x=2x^2+15$

বা, $2x^2+3x-2x^2=15$ [$2x^2$ পক্ষান্তর করে]

বা, $3x=15$ বা, $x=\frac{15}{3}=5$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=5$

মন্তব্য : প্রথম দর্শনে এ সমীকরণটিকে এক ঘাত সমীকরণ মনে নাও হতে পারে। কারণ সমীকরণে xএর সর্বোচ্চ ঘাত 2 রয়েছে। কিন্তু পরবর্তী পর্যায়ে দেখা গেল x^2 যুক্ত পদ অপসারিত হয়ে, সমীকরণটিকে এক ঘাত সমীকরণে রূপান্তরিত করেছে।

উদা. 4. সমাধান কর : $\frac{1}{3}(x-\frac{5}{2})-\frac{3}{5}(x+\frac{4}{3})+\frac{7}{2}=0$

$\frac{1}{3}(x-\frac{5}{2})-\frac{3}{5}(x+\frac{4}{3})+\frac{7}{2}=0$

বা, $\frac{1}{3}\left(\frac{2x-5}{2}\right)-\frac{3}{5}\left(\frac{3x+4}{3}\right)+\frac{7}{2}=0$

বা, $\frac{2x-5}{6}-\frac{3x+4}{5}=-\frac{7}{2}$

বা, $\frac{10x-25-18x-24}{30}=\frac{-7}{2}$

বা, $\frac{-8x-49}{30}=\frac{-7}{2}$ বা, $\frac{-(8x+49)}{30}=\frac{-7}{2}$.

বা, $\frac{8x+49}{30}=\frac{7}{2}$ বা, $16x+98=210$

বা, $16x=210-98$ বা, $16x=112$

বা, $x=\frac{112}{16}$ বা, $x=7$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=7$

উদা. 5. সমাধান কর :

$(x-6)(2x-9)-(11-2x)(7-x)=5x-4-7(x-2)$

$(x-6)(2x-9)-(11-2x)(7-x)=5x-4-7(x-2)$

বা, $2x^2-21x+54-77+25x-2x^2=5x-4-7x+14$

বা, $4x-23=10-2x$ বা, $4x+2x=10+23$

বা, $6x=33$ বা, $x=\frac{33}{6}=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=5\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 25

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $3(2x-1)+7x=-29$
2. $3(2x+5)-2x=3(x+6)$
3. $50+3(4x-5)+8(x+3)=x+2$
4. $(x-3)(x+5)+2=x^2+x$
5. $3(x+5)-3(2x-1)=32-4(x-5)^2+4x^2$
6. $5x-(4x-7)(3x-5)=6-3(4x-9)(x-1)$
7. $\frac{x+5}{3}+\frac{2x-1}{7}=4$.
8. $\frac{6x-2}{9}+\frac{3x+5}{18}=\frac{1}{3}$
9. $\frac{x-3}{3}+\frac{x+2}{8}+\frac{2x-1}{11}=3$
10. $\frac{x+12}{6}-x=6\frac{1}{2}-\frac{x}{12}$
11. $\frac{8}{5}(x-4)-\frac{1}{3}(2x-9)=\frac{1}{4}(x-1)-2$
12. $\frac{x+1}{2}-\frac{5x+9}{28}=\frac{x+6}{21}+5-\frac{x-12}{3}$
13. $\frac{5x}{6}-\frac{2x-3}{9}=x+\frac{x-12}{6}-1$

14. $\frac{3}{5}\left(\frac{x}{3}+6\right)=3\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\left(\frac{16}{27}-\frac{2x}{3}\right)$

15. $\frac{x-1}{2}-\frac{4x+3}{21}=\frac{5x+9}{28}+\frac{x-12}{3}$

16. $\frac{3x}{4}-\frac{x-7}{51}-(x-3)\frac{6}{17}(x+10)+\frac{2x+5}{4}=0$

17. $\frac{1}{3}(x+\frac{3}{2})-\frac{3}{5}(x-\frac{4}{3})-\frac{7}{3}=0$

18 $3(x-4)^2+5(x-3)^2=(2x-5)(4x-1)-40$

19. $\frac{9x+5}{14}+\frac{8x-7}{7}=\frac{18x+11}{28}+\frac{5}{4}$

20. $\frac{1}{4}(x-8)+\frac{x+4}{4}+\frac{23-x}{5}=7-\frac{x-1}{7}$

অপেক্ষাকৃত কঠিনতর সরল সমীকরণের সমাধান :

বর্তমানে অপেক্ষাকৃত কঠিন সরল-সমীকরণ সমাধানের কয়েকটি প্রক্রিয়া দেখান হবে। এ প্রক্রিয়াগুলো কোন সাধারণ নিয়ম বা সূত্রানুযায়ী করা হয় না। বিশেষ বিশেষ সমীকরণ সমাধানে এই প্রক্রিয়াগুলোর ব্যবহার করে জটিল সমীকরণকে অনেক সহজে সমাধান করা যায়।

(i) একান্তর প্রক্রিয়া :

যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তা হলে $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ হবে কারণ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ অর্থাৎ $ad=bc$ (বজ্রগুণন করে)। এখন উভয়পক্ষকে cd দিয়ে ভাগ করলে $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$। নিচের উদাহরণটি লক্ষ্য কর।

সমাধান কর : $\frac{x^2+3x+4}{x^2+5x+8}=\frac{x+3}{x+5}$

$$\frac{x^3+3x+4}{x^3+5x+8}=\frac{x+3}{x+5}$$

বা, $\frac{x^2+3x+4}{x+3}=\frac{x^3+5x+8}{x+5}$ [একান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে]

বা, $\frac{x(x+3)+4}{x+3}=\frac{x(x+5)+8}{x+5}$

বা, $x+\frac{4}{x+3}=x+\frac{8}{x+5}$

বা, $\frac{4}{x+3}=\frac{8}{x+5}$ [উভয়পক্ষের x অপসারিত করে]

বা, $8(x+3)=4(x+5)$ [বজ্রগুণন করে]

বা, $8x+24=4x+20$ বা, $8x-4x=20-24$

বা, $4x=-4$ বা, $x=\frac{-4}{4}=-1$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=-1$

(ii) পক্ষান্তর প্রক্রিয়া :

নিচের উদাহরণটি লক্ষ করে দেখ।

সমাধান কর : $\frac{9x+5}{21}=\frac{3x-2}{7}+\frac{4x-5}{3x+1}$

এক্ষেত্রে যে পদ দুটির হরে অজ্ঞাতরাশি x অনুপস্থিত, তাদের এক দিকে নিয়ে এলে সমাধানের সুবিধা হবে। তাই ডানপক্ষের প্রথম পদটিকে বামপক্ষে এনে পাওয়া যাবে,

$\frac{9x+5}{21}-\frac{3x-2}{7}=\frac{4x-5}{3x+1}$

বা, $\frac{9x+5-9x+6}{21}=\frac{4x-5}{3x+1}$

বা, $\frac{11}{21}=\frac{4x-5}{3x+1}$ বা, $21(4x-5)=11(3x+1)$

বা, $84x-105=33x+11$

বা, $84x-33x=105+11$

বা, $51x=116$ বা, $x=\frac{116}{51}=2\frac{14}{51}$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=2\frac{14}{51}$

(iii) পদ বিচ্ছিন্নকরণ প্রক্রিয়া :

নিচের উদাহরণটি লক্ষ কর।

সমাধান কর : $\frac{5}{x+2}+\frac{8}{x-3}=\frac{13}{x-4}$

লক্ষ কর, সমীকরণের পদগুলির লবে অজ্ঞাত রাশি অনুপস্থিত। ডানপক্ষের লব 13কে বামপক্ষের লবদ্বয়ের সমষ্টির আকারে লেখা যায় এবং ডান পক্ষকে দুটি পদে বিচ্ছিন্ন করা যায়।

$$\frac{5}{x+2}+\frac{8}{x-3}=\frac{13}{x-4}$$

বা, $\frac{5}{x+2}+\frac{8}{x-3}=\frac{5+8}{x-4}$

বা, $\frac{5}{x+2}+\frac{8}{x-3}=\frac{5}{x-4}+\frac{8}{x-4}$

বা, $\frac{5}{x+2}-\frac{5}{x-4}=\frac{8}{x-4}-\frac{8}{x-3}$

বা, $5\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-4}\right)=8\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}\right)$

বা, $5.\frac{-6}{(x+2)(x-4)}=8.\frac{1}{(x-4)(x-3)}$

উভয়পক্ষকে $(x-4)$ দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায় ;

$\frac{-30}{x+2}=\frac{8}{x-3}$ বা, $\frac{-15}{x+2}=\frac{4}{x-3}$

বা, $4x+8=-15x+45$ [বজ্রগুণন করে]

বা, $4x+15x=45-8$

বা, $19x=37$ বা, $x=\frac{37}{19}=1\frac{18}{19}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=1\frac{18}{19}$

(iv) ভাগ প্রক্রিয়া :

নিচের উদাহরণটি দেখ।

সমাধান কর : $\frac{12x-1}{4x-2}+\frac{8x-3}{4x-3}=\frac{20x-17}{4x-5}$

প্রত্যেকটি ভগ্নাংশের লবকে এমনভাবে বিশ্লেষণ করতে হবে, যাতে তার একটি অংশ অন্তত হর দিয়ে বিভাজ্য হয়।

$$\frac{12x-1}{4x-2}+\frac{8x-3}{4x-3}=\frac{20x-17}{4x-5}$$

বা, $\frac{3(4x-2)+5}{4x-2}+\frac{2(4x-3)+3}{4x-3}=\frac{5(4x-5)+8}{4x-5}$

বা, $3+\frac{5}{4x-2}+2+\frac{3}{4x-3}=5+\frac{8}{4x-5}$

বা, $\frac{5}{4x-2}+\frac{3}{4x-3}=\frac{8}{4x-5}$ [উভয়পক্ষে x বর্জিত অংশের মান সমান বলে অপসারিত করা হলো।]

বা, $\frac{5}{4x-2}+\frac{3}{4x-3}=\frac{5+3}{4x-5}$ [এবার পূর্ব প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে]

বা, $\frac{5}{4x-2}-\frac{5}{4x-5}=\frac{3}{4x-5}-\frac{3}{4x-3}$

বা, $5\left(\frac{1}{4x-2}-\frac{1}{4x-5}\right)=3\left(\frac{1}{4x-5}-\frac{1}{4x-3}\right)$

বা, $5.\frac{-3}{(4x-2)(4x-5)}=3.\frac{2}{(4x-5)(4x-3)}$

উভয়পক্ষকে $(4x-5)$ দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়

$\frac{-15}{4x-2}=\frac{6}{4x-3}$ বা, $\frac{-5}{4x-2}=\frac{2}{4x-3}$ [3 দিয়ে ভাগ করে]

বা. $8x-4=-20x+15$

বা, $8x+20x=15+4$ বা, $28x=19$

বা, $x=\frac{19}{28}$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{19}{28}$.

কয়েকটি কঠিনতর সমীকরণের সমাধান :

উদা. 1. সমাধান কর :

$$\frac{2+5x}{35}-\frac{2x^2-7}{14(x-1)}=\frac{6-5x}{15}+\frac{10x-11}{30}$$

$$\frac{2+5x}{35}-\frac{2x^2-7}{14(x-1)}=\frac{6-5x}{15}+\frac{10x-11}{30}$$

পক্ষান্তর করে, $\frac{2+5x}{35}-\frac{6-5x}{15}-\frac{10x-11}{30}=\frac{2x^2-7}{14(x-1)}$

বা, $\frac{12+30x-84+70x-70x+77}{210}=\frac{2x^2-7}{14(x-1)}$

বা, $\frac{30x+5}{210}=\frac{2x^2-7}{14(x-1)}$

বা, $\frac{5(6x+1)}{210}=\frac{2x^2-7}{14(x-1)}$

বা, $\frac{6x+1}{42}=\frac{2x^2-7}{14(x-1)}$ বা, $\frac{6x+1}{3}=\frac{2x^2-7}{x-1}$

বা, $6x^2-5x-1=6x^2-21$

বা. $-5x=-20$ $\therefore$ $x=4$

উদা. 2. সমাধান কর :

$$\frac{24-5x}{x-2}+\frac{8x-49}{4-x}=\frac{28}{x-2}-13$$

পক্ষান্তর করে, $\frac{8x-49}{4-x}+13=\frac{28}{x-2}-\frac{24-5x}{x-2}$

বা, $\frac{8x-49+52-13x}{4-x}=\frac{28-24+5x}{x-2}$

বা, $\frac{3-5x}{4-x}=\frac{4+5x}{x-2}$

বা, $3x-5x^2-6+10x=16+20x-4x-5x^2$

[বজ্রগুণন করে]

বা. $13x-16x=16+6$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $-3x=22$ বা, $x=-\frac{22}{3}=-7\frac{1}{3}$

উদা. 3. সমাধান কর :

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-8}$$

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-8}$$

বা, $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-9}$

বা, $\frac{-1}{(x-3)(x-4)}=\frac{-1}{(x-8)(x-9)}$

বা, $(x-3)(x-4)=(x-8)(x-9)$

বা, $x^2-7x+12=x^2-17x+72$

বা, $17x-7x=72-12$

বা, $10x=60$ বা. $x=6$.

উদা. 4. সমাধান কর :

$(x+a)(x+b)-c(a+c)=(x-c)(x+c)+ab$

$(x+a)(x+b)-c(a+c)=(x-c)(x+c)+ab$

গুণ করে পাই. $x^2+ax+bx+ab-ac-c^2=x^2-c^2+ab$

বা, $ax+bx=ac$ বা, $(a+b)x=ac$

$$\therefore \quad x=\frac{ac}{a+b}$$

প্রশ্নমালা 26

নিচের সমীকরণগুলো সমাধান কর :

1. $\frac{3}{x+3}=\frac{4}{x+2}$
2. $\frac{5}{3x+4}=\frac{4}{5(x-3)}$
3. $\frac{6x-3}{2x+7}=\frac{3x-2}{x+5}$
4. $\frac{2(x-3)}{3x+1}=\frac{4x-3}{6x+1}$
5. $\frac{3x+1}{x+5}=\frac{6x-7}{2x+1}$
6. $\frac{3x-4}{4x-5}=\frac{6x-7}{8x-9}$

7. $\frac{22x-12}{8x-5}=2+\frac{3x+7}{4x+8}$ 8. $\frac{9x-22}{2x-5}-\frac{3x-5}{2x-7}=3$

9. $\frac{2x}{2x-1}+\frac{2x+1}{2x}=2$ 10. $\frac{x-a}{x+b}=\frac{2x-a}{2x+b}$

11. $\frac{10x+41}{18}-\frac{12x+38}{13x+23}=\frac{5x+8}{9}$

12. $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{4x+5}{4x+4}+\frac{3x+3}{3x+1}$

13. $\frac{3}{x-6}+\frac{7}{x-2}=\frac{10}{x-4}$

14. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x+3}=\frac{6}{3x+5}$

15. $\frac{12x+3}{4}=\frac{15x-1}{5}+\frac{3x-2}{2x-3}$

16. $\frac{10}{5x-9}+\frac{14}{2x+9}=\frac{9}{x+8}$

17. $\frac{6x+1}{15}=\frac{2x-4}{7x-16}+\frac{2x-1}{5}$

18. $\frac{8}{x-5}+\frac{7}{x-4}=\frac{15}{x-3}$

19. $\frac{3x+2}{x-1}+\frac{2x-4}{x+2}=5$

20. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}$

21. $\frac{x^2+7x+2}{x^2+8x+1}=\frac{x+7}{x+8}$

22. $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+7)}=\frac{x+5}{x+8}$

23. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}$

24. $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-8}$

25. $\frac{x-8}{x-9}+\frac{x-4}{x-5}=\frac{x-9}{x-10}+\frac{x-3}{x-4}$

26. $\frac{x-8}{x-10}+\frac{x-4}{x-6}=\frac{x-7}{x-9}+\frac{x-5}{x-7}$

27. $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{3x+1}{3x-2}=\frac{3x+2}{3x-1}+\frac{6x+1}{6x-5}$

28. $\frac{2x+3}{2x+1}+\frac{4x+7}{2x+3}=\frac{6(x+3)}{2x+5}$

29. $\frac{3x+5}{x+1}=\frac{4x+8}{3x+3}+\frac{10x+1}{6x+3}$

30. $\frac{2x+9}{x+4}+\frac{3x-2}{x-1}=\frac{4x+13}{x+3}+\frac{x+1}{x}$

31. $\frac{6+5x}{5}-\frac{3(7-2x^2)}{14(x-1)}=\frac{1+3x}{7}+\frac{11+10x}{10}+\frac{1}{35}$

32. $\frac{11x^2+33x+8}{22x^2+33x+13}=\frac{x+3}{2x+3}$

33. $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=2$, $x \neq 0$

34. $\frac{x-a}{c-a}+\frac{x-b}{c-b}=2$, $a+b \neq 2c$

35. $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-a+c}=\frac{1}{x-b-c}-\frac{1}{x-b}$, $a \neq b+c$

36. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$, $a \neq 0, b \neq 0$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1

1. (i) $(p+q)$ (ii) $a-5$ (iii) $10b$ (iv) $3x+5$ (v) $(a+b)+7$ (vi) $\frac{a+b}{c}$ (vii) $p-q$

2. (i) x থেকে y কম (ii) p থেকে q বেশী বা p ও q-এর সমষ্টি (iii) m-এর 4 গুণ (iv) n বিভক্ত 5 (v) p থেকে q-এর 3 গুণ বেশী (iv) a-এর অর্ধেক থেকে b বেশী।

3. $(x-y)$টি 4. (i) $(65-x)$ বছর (ii) $(65+y)$ বছর

5. $(1000a+10b)$ মিমি 6. $x-y$ 7. $\frac{250-x}{y}$ টাকা

8. $\frac{x}{y}$ ঘণ্টা পরে 9. $30+x$, $10x+3$, $10y+x$ 10. ভাইয়ের বয়স $=(12-x)$ বছর, দিদির বয়স $=(12+y)$ বছর ; দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ভাইয়ের বয়স $=(12-x+y)$ বছর, দিদির বয়স $=(12+2y)$ বছর।

প্রশ্নমালা 2

1. 21 2. -7 3. 10 4. 1 5. 7 6. 22
7. $\frac{6}{5}$ 8. 0 9. $15\frac{1}{6}$ 10. 2.

প্রশ্নমালা 3

1. (i) 15 টাকা ক্ষতি (ii) 20 কিমি উপরে ওঠা
(iii) 10 মিটার দক্ষিণ দিকে (iv) 10°C উষ্ণতা হ্রাস.

2. (i) -10 টাকা, লাভ (ii) 5 কিমি, উত্তরে
(iii) -15 কিমি, নিচে নামা (iv) 5°, বৃদ্ধি

3. (i) $-8, -3, 0, 1, 4$ (ii) $-9, -7, -5, -1, 0$
(iii) $-4, -2, 3, 6, 8$ (iv) $-5, -3, -1, 1$
(v) $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}$ (vi) $-4, -1, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3$

4. (i) 14 (ii) 34 5. না ; 10, 6

6. (i) $b-3a$ (ii) 2 (iii) $2a$ (iv) $1-x$

9. $(2a+bc-2b)$ টাকা

10. (i) $b-c$ (ii) $y-z$ (iii) $b-c+d$

প্রশ্নমালা 4

1. (i) $a^2+2b^2+3c^2$ (ii) 0 (iii) $9a^2-2a+8$
2. (i) $2x+2y+4z$ (ii) $a+b+c$ (iii) $7q^2$

3. (i) $a-4b$ (ii) $4x^2-y^2+5z^2$
(iii) $3m^2-3mn$
4. (i) $-16x^2y^2z^2$ (ii) $-8a^4b^4$ (iii) $-a^6b^2c^2$
5. (i) $3x^3-2x^2-5x$ (ii) b^4-c^4 (iii) x^2z-y^2z
6. (i) 0 (ii) 0
7. $al^2+bm^2+cn^2-l^2-m^2-n^2+alm+bmn+cnl-lm-mn-nl$; 0
8. (i) $4a^2b-5ab^2+3$ (ii) $9xy-6y^4-5x^2y$
(iii) $3p^2qr-4pr-1$ (iv) $3n+4mn^2-5m^2n^3$.

প্রশ্নমালা 5

1. (i) $16x^2+24xy+9y^2$ (ii) $64a^2-64ab+16b^2$
(iii) $x^2y^2+2xyc+c^2$ (iv) $16x^2-8xabc+a^2b^2c^2$
(v) $x^2+y^2+2xy+4x+4y+4$
(vi) $4a^2+9b^2+25c^2+12ab-30bc-20ca$
(vii) $x^2+y^2+z^2p^2+2xy+2yzp+2zxp$
(viii) $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca-2a-2b+2c+1$
(ix) $1+4x+4y+6z+8xy+12yz+12zx+4x^2+4y^2+9z^2$
(x) $m^2+4n^2+9p^2+16q^2+4mn-6pm-12pn-16qn-24pq$
2. (i) $25a^2$ (ii) $4x^2$ 3. (i) $(4a+1)^2$ (ii) $(6x-7y)^2$
(iii) $\left(1+\frac{2}{x}\right)^2$ (iv) $\left(2x-\frac{3}{4y}\right)^2$
4. (i) 100 (ii) 9 (iii) 49 (iv) 289 5 65
9. 624 10. (i) $16x$ (ii) $40ab$.

প্রশ্নমালা 6

1. (i) a^2-36 (ii) $36a^2-25b^2$ (iii) $a^2c^2-b^2d^2$
(iv) $16x^2y^2-25p^2q^2$ (v) $4m^2+n^2-p^2+4mn$
(vi) $a^2+4b^2-9c^2+4ab$ (vii) $4x^2-y^2+9z^2+12xz$
2. (i) 999996 (ii) 2249879 (iii) 302464
3. (i) $-12c(a+2b)$ (ii) $7x^2+21y^2+52xy+6zx+42yz$
(iii) 18128 (iv) 515420 4. (i) $(9a+7)(9a-7)$
(ii) $(11m+13n)(11m-13n)$ (iii) $(5x+3y)(x+5y)$
(iv) $(a+b+1)(a+b-1)$ (v) $(x-2y+3)(x-2y-3)$.
5. (i) 500^2-483^2 (ii) 475^2-66^2
(iii) $\left(\frac{5a+4b}{2}\right)^2-\left(\frac{2b-a}{2}\right)^2$ (iv) $(3x)^2-(x+3y)^2$.

5. (i) $(2+5a)(2-5a)$ (ii) $(xy+1)(xy-1)$
(iii) $(ab+cd)(ab-cd)$ (iv) $(5m+7n)(5m-7n)$
(v) $(a+b+4)(a+b-4)$ (vi) $(7x+y)(x+5y)$
(vii) $a(15x-14y)(x+14y)$ (viii) $4(x^2+y^2)xy$
(ix) $(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$
(x) $(x+y+z)(x+y-z)$ (xi) $(4x+2a-3b)(4x-2a+3b$
(xii) $(a-b)(a+b-2c)$ (xiii) $(x-y)(x+y-2)$
(xiv) $(p+m-n)(p-m+n)$
(xv) $(a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)$
(xvi) $(c-a)(ab+bc+1)$ (xvii) $(1+a)(2-a)$.

প্রশ্নমালা 7

1. 0 2. $\frac{3}{4}$ 3. -11 4. 4 5. -2 6. 4
7. 1 8. 15 9. 9 10. 7 11. 9 12. -16
13. 2 14. 4 15. -7 16 41 17.
18. 12 বছর 19. $3x+9=24$ (চালের পরিমাণ x কিলো), 5 কিলো
20. $3x+18=162$ (সুলেখার বয়স x বছর) ; নমিতা 56, সুলেখা 48
নন্দিতা 58.

প্রশ্নমালা 8

1. $6a^2+17ab+12b^2+19a+26b+10$
2. $3x^2-4y^2-5z^2+9yz+2zx-xy$
3. $15a^4-8a^3-3a^2+34a-24$
4. $10x^5-5x^4+21x^3-7x^2+11x-6$
5. x^8+x^4+1 6. $6k^4-11k^3-2k^2+4k+1$
7. $24a^5-46a^4+9a^3+13a^2-3a$
8. $15m^4-32m^3+50m^2-32m+15$
9. $-6x^5+7x^4-4x^3-2x^2+9x+2$
10. $x^6-x^5+4x^3+9x^2-25$ 11. $2a^4+a^3b+2ab^3+b$
12. $x^5+2x^4y+x^3y^2+x^2y^3+2xy^4+y^5$
13. $p^5-p^4q^2+p^3q^2+p^3+p^2q^3-p^2q^4-p^2q^2+q^3+q^5$
14. $a^5-3a^4b-2a^3b^2-4a^2b^3-b^5$
15. $2a^2x^4+abx^3+2acx^2-3b^2x^2-7bcx-4c^2$
16. $-6x^5+7x^4-4x^3-2x^2+9x+2$
17. $y^6-6y^5+15y^4-20y^3+15y^2-6y+1$
18. $x^3+y^3+z^3-3xyz$
19. $-2a^8+7a^7b+8a^6b^2-31a^5b^3-7a^4b^4+22a^3b^5-6a^2$
20. $a^3+2a^2-2a^2b-ab+2ab^2+2a-b^3+1$

21. $p^2x^3+psx^2-q^2x^3-2qrx^2-qsx-r^2x-rs$
22. $a^6b^5-2a^5b^4c+a^4b^3c^2-a^3b^2c^3+ac^5$
23. a^4-b^4 24. x^6-y^6 25. $6x^3-x^2-31x-10$
26. $16x^4-28x^3y-16x^2y^2+43xy^3-15y^4$ 27. a^6-b^6
28. $a^4x^4+ab^3xy^3-a^3bx^3-b^4y^3$
29. $x^8+8x^4y^4-12x^2y^6+27y^8$
30. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$
31. $a^8+a^4b^4+b^8$
32. $x^3y^3+3xy^3z^2-x^3yz^2+3x^2y^3z-x^2yz^3+y^3z^3$
33. $8x^6-19x^3y^3-27y^6$ 34. $6x^3-22x^2+32x-24$
35. $15a^4+7a^3-36a^2+76a-48$
36. $6x^5-4x^4-20x^3-7x^2-20x+10$
37. $apx^3+aqx^2+bpx^2+arx+bqx+br$ 38. $2x^3$
39. $2(lm+mn+nl)x+(lm+mn+nl)y+(l^2+m^2+n^2)y$
$+lm+mn+nl+l^2+m^2+n^2$
40. $2a^2b+2ab^2+2b^3$

প্রশ্নমালা 9

1. $a+2$ 2. $x+2$ 3. $m+3$
4. $a+2$ 5. $x-4$ 6. $m-7$
7. $x-2$ 8. $a-8$ 9. $p+5$
10. $x+2$ 11. $3y-2$ 12. $2c-1$
13. $-3x+4$ 14. $-7m+3$ 15. $2a-3b$
16. $-6c-d$ 17. $3a-4b$
18. $3x^2y-5xy^2+4y^3$ 19. $3x-7y$
20. $a^2c-2abc^2-3b^2c^3$ 21. $2a-1$ 22. $x-3$
23. $2a-7$ 24. $-a^2+a+1$ 25. m^2-m-2
26. $27x^3+9x^2+3x+1$ 27. $2y+1$
28. $3p^2-2p+5$ 29. $3a^2-4a+5$ 30. $2c-d-3$
31. $3x-7y$ 32. $a-2b-3c$ 33. m^2-2n^2
34. $a+2b+3c$ 35. y^3-x-3
36. $a^2x-2abx^2-3b^2x^3$

প্রশ্নমালা 10

1. ভাগফল $=4a+2$, ভাগশেষ $=4$
2. ভাগফল $=2x-\frac{6}{5}$, ভাগশেষ $=\frac{12}{5}$
3. ভাগফল $=5a-14$, ভাগশেষ $=35a-17$
4. ভাগফল $=x-4$, ভাগশেষ $=x-1$

5. ভাগফল $= 3x^2 + 2x - 4$, ভাগশেষ $= 3x - 4$
6. ভাগফল $= p^2 - 3p + 2$, ভাগশেষ $= 2p + 3$
7. ভাগফল $= 3x^2 - 4x + 5$, ভাগশেষ $= 2x + 7$
8. ভাগফল $= x^3 - 7x + 9$, ভাগশেষ $= 8x - 15$
9. ভাগফল $= 2a + 3b$, ভাগশেষ $= 3b^3$
10. ভাগফল $= x^3 + x - y$, ভাগশেষ $= -y^3$
11. ভাগফল $= a^2 - 3ab + 2b^2$, ভাগশেষ $= -3b^3$
12. ভাগফল $= 7x - 6$, ভাগশেষ $= 10$
13. ভাগফল $= 3a - 5$, ভাগশেষ $= 12a$
14. ভাগফল $= 2a^2 + 7a + 3$, ভাগশেষ $= 0$
15. ভাগফল $= m^2 + 3m + 2$, ভাগশেষ $= 0$
16. ভাগফল $= x^2 - 2x + 3$, ভাগশেষ $= -38x^2$
17. ভাগফল $= 2a^3 + 4a^2 + 6a + 3$, ভাগশেষ $= 0$
18. ভাগফল $= 3x^3 + 6x^2 + 4x + 2$, ভাগশেষ $= 0$
19. ভাগফল $= a + 4$, ভাগশেষ $= 0$
20. ভাগফল $= 27x^3 + 9x^2 + 3x + 1$, ভাগশেষ $= 3$
21. ভাগফল $= a - 4$, ভাগশেষ $= a - 1$
22. ভাগফল $= 3x^2 + 2x - 4$, ভাগশেষ $= 3x - 4$
23. ভাগফল $= a^3 - 7a + 6$, ভাগশেষ $= 2a - 8$
24. ভাগফল $= 2a^3 - 4a^2 + 4a - 2$, ভাগশেষ $= 0$
25. ভাগশেষ $= r$
26. ভাজ্য $= 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

প্রশ্নমালা 11

1. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
2. $27a^3 + 108a^2 + 144a + 64$
3. $64c^3 + 48c^2d + 12cd^2 + d^3$
4. $27m^3 + 54m^2n + 36mn^2 + 8n^3$
5. $a^6 + 6a^4b + 12a^2b^2 + 8b^3$
6. $a^3b^3 + 3a^2b^2cd + 3abc^2d^2 + c^3d^3$
7. $27a^3 + 54a^2bc + 36ab^2c^2 + 8b^3c^3$
8. $x^6 + 3x^4yz + 3x^2y^2z^2 + y^3z^3$
9. $x^3 + 3x^2yz^2 + 3xy^2z^4 + y^3z^3$
10. $p^6 + 3p^4q^2 + 3p^2q^4 + q^6$
11. $a^3 + b^3 + 8c^3 + 3a^2b + 6a^2c + 3ab^2 + 12ac^2 + 12abc + 12bc^2 + 6b^2c$
12. $a^3 + 8b^3 + 27c^3 + 6a^2b + 9a^2c + 12ab^2 + 27ac^2 + 36abc + 54bc^2 + 36b^2c$

13. 857375 14. 1331000 15. 1953125
16. 125000 17. 216000 18. 125
19. $216a^3$ 20. $27x^3$ 21. $64m^3$
22. $64x^3$ 23. 1 24. 729
25. 512 26. -27

প্রশ্নমালা 12

1 $a^3-9a^2+27a-27$
2. $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$
3. $27m^3-27m^2n+9mn^2-n^3$
4. $8p^3-36p^2q+54pq^2-27q^3$
5. $a^6-6a^4b+12a^2b^2-8b^3$
6. $a^3b^3-3a^2b^2cd+3abc^2d^2-c^3d^3$
7. $8x^3-36x^2bc+54xb^2c^2-27b^3c^3$
8. $a^6-3a^4bc+3a^2b^2c^2-b^3c^3$
9. $x^3-3x^2yz^2+3xy^2z^4-y^3z^6$
10. $m^6-3m^4n^2+3m^2n^4-n^6$
11. $1+3b-6c+3b^2+12c^2-12bc-6b^2c+12bc^2+b^3-8c^3$
12. $p^3-8q^3-27r^3-6p^2q+12pq^2-9p^2r-36q^2r$
$+27pr^2-54qr^2+36pq$
13. $a^9-3a^6+3a^3-1$ 14. $8-12b^3+6b^6-b^9$
15. 912673 16. 26463592 17. 997002999
18 15438249 19. 125 20. 27
21. 8 22. $-b^3$ 23. $-27y^3$
24. $216q^3$ 25. $m^3-3m^2n+3mn^2-n^3$
26. 1 27. 0 28. 0 29. 216

প্রশ্নমালা 13

1. 72 2. 152 3. 98 4. 335 5 52
6. 0 8. 234 11. 455 12. 1568

প্রশ্নমালা 14

1. x^3+27 2. $1+27a^3$ 3. $8a^3+27b^3$
4. $m^3n^3+p^3$ 5. $a^3+b^3c^3$ 6. x^6+y^6
7. $64p^3+125q^3$ 8. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3$ 9. x^6+1
10. $x^3+2y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3y^2z+3yz^2$
11. $2a^3+9a^2+15a+9$ 12. $9x^3-9x^2+9x.$

প্রশ্নমালা 15

1. x^3-27 2. $1-64x^3$ 3. $27a^3-125b^3$
4. $a^3b^3-c^3d^3$ 5. x^6-y^6 6. $a^6-8b^3c^3$
7. $64x^6-729y^6$ 8. a^6-64b^6 9. 0
10. 54 11. a^6-b^6 12. $1+8x^3$

প্রশ্নমালা 16

1. $(a+2)(a^2-2a+4)$ 2. $(2x+1)(4x^2-2x+1)$
3. $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$ 4. $(2m+3n)(4m^2-6mn+9n^2)$
5. $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$ 6. $(2p+7q)(4p^2-14pq+49q^2)$
7. $(ab+c)(a^2b^2-abc+c^2)$ 8. $3(4a+1)(16a^2-4a+1)$
9. $a(2m+3np)(4m^2-6mnp+9n^2p^2)$
10. $(7x+8y)(49x^2-56xy+64y^2)$
11. $(7abc+10mnp)(49a^2b^2c^2-70abcmnp+100m^2n^2p^2)$
12. $2a(2ax+3y)(4a^2x^2-6axy+9y^2)$ 13. $(1-2a)(1+2a+4a^2)$
14. [illegible]$b)(16a^2+4ab+b^2)$ 15. $(5x-6y)(25x^2+30xy+36y^2)$
16. $m(m-2)(m^2+2m+4)$
17. $(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
18. $(bc-2d)(b^2c^2+2bcd+4d^2)$
19. $(3m-4np)(9m^2+12mnp+16n^2p^2)$
20. $(6m-7n)(36m^2+42mn+49n^2)$
21. $(9abc-5)(81a^2b^2c^2+45abc+25)$
22. $(a-2b+c)(a^2+4b^2+c^2-4ab-ca+2bc)$
23. $(m-n+p)(m^2+n^2+p^2-2np+mn-mp)$
24. $2(a-b)(a^2+ab+b^2)(4a^6-2a^3b^3+b^6)$
25. $2(m+n)(4m^2+2mn+n^2)$ 26. $2q(3p^2+q^2)$
27. $(x+2)(x^2+x+1)$
28. $(2x+5y+3z)(4x^2+7y^2+9z^2+2xy+12yz-6zx)$
29. $(1+4x)(1+5x+7x^2)$
30. $(2-a+b)(4+a^2+b^2+2a-2b-2ab)$
31. $(2x-y+4)(4x^2+2xy+y^2-2x-5y+7)$
32. $n(m+n)(m+2n)$.

প্রশ্নমালা 17

1. $(x+1)(x+3)$ 2. $(x+2)(x+3)$ 3. $(x+2)(x+5)$
4. $(a+1)(a+2)$ 5. $(a+3)(a+4)$ 6. $(a+4)(a+6)$
7. $(m+3)(m+8)$ 8. $(p+6)(p+8)$ 9. $(4+x)(15+x)$
10. $(x-3)(x-4)$ 11. $(z-2)(z-7)$ 12. $(x-3)(x-13)$

13. $(a-5)(a-7)$ 14. $(m-5)(m-13)$ 15. $(x-6)(x-9)$
16. $(a+7)(a-5)$ 17. $(c+15)(c-3)$ 18. $(x+9)(x-4)$
19. $(p+8)(p-2)$ 20. $(x+8)(x-7)$ 21. $(x-3)(x+2)$
22. $(a-7)(a+5)$ 23. $(x-7)(x+3)$ 24. $(x-7)(x+4)$
25. $(m-24)(m+3)$ 26. $(a-11)(a+10)$ 27. $(b-17)(b+3)$
28. $(x-13)(x+9)$ 29. $(a-9)(a+7)$ 30. $(x-7)(x-9)$
31. $(m+9)(m-8)$ 32. $(12-a)(13-a)$ 33. $(x+15)(x-7)$
34. $(p+13)(p-11)$ 35. $(a-3)(a-20)$ 36. $(1-9x)(1+4x)$
37. $(x+27)(x-3)$ 38. $(a-18)(a+5)$ 39. $(x+2)(x-51)$
40. $(5-x)(16-x)$ 41. $(a-1)(a+1)(a^2+5)$
42. $(x-2)(x+2)(x^2-5)$ 43. $(x^2+3)(x^2+3)$
44. $(x-2)(x^3-2)(x^2+2x+4)$
45. $(a-1)(a+2)(a^2+a+1)(a^2-2a+4)$
46. $(m^2-7)(m^2+5)$ 47. $(a+4b)(a-3b)$
48. $(x-15y)(x+14y)$ 49. $(m+7n)(m-5n)$
50. $(p-3q)(p-13q)$ 51. $(x+24y)(x-4y)$
52. $(a+8b)(a-5b)$ 53. $(x+y-3)(x+y+2)$
54. $(a+1)(a+1)(a^2+2a-2)$ 55. $(x^2-2x+9)(x^2-2x-4)$
56. $(m^2+2m+3)(m-4)(m+6)$ 57. $(p^2-3q-7)(p^2-3q-9)$
58. $(x-10)(x+2)(x-9)(x+1)$
59. $(x^2+10x+18)(x+8)(x+2)$
60. $(x+2)(x-5)(x^2-3x-6)$.

প্রশ্নমালা 18

1. $(a+2)(2a+1)$ 2. $(x+1)(3x+5)$ 3. $(a+4)(3a+2)$
4. $(a+4)(2a+1)$ 5. $(m+2)(2m+3)$ 6. $(c+3)(2c+1)$
7. $(p+3)(2p-5)$ 8. $(2x+3)(3x-5)$ 9. $(a+1)(5a-9)$
10. $(x-1)(9x+8)$ 11. $(k+1)(3k-25)$ 12. $(x-1)(2x+1)$
13. $(2a-7)(5a+4)$ 14. $(2m-5n)(3m+2n)$
15. $(3x-1)(3x+11)$ 16. $(a+b)(5a-13b)$
17. $(4p-3q)(3p+8q)$ 18. $(a-5b)(5a-b)$
19. $(a+7b)(7a-b)$ 20. $(5x-4y)(2x+5y)$
21. $(a-b)(11a+13b)$ 22. $3(x+y)(x-3y)$
23. $3(p-3q)(3p+q)$ 24. $(a+8b)(8a-b)$
25. $(x-2y)(12x+5y)$ 26. $(3a-7)(7a-3)$
27. $(5-x)(5+3x)$ 28. $(5-a)(1+3a)$ 29. $(3-2x)(4+3x)$
30. $(3-2a)(2+3a)$ 31. $(ab+3)(ab-13)$ 32. $(xy+8)(xy-9)$
33. $(a^2+1)(3a^2-5)$ 34. $(x-1)(x^2+x+1)(8x^3+9)$

35. $(m^2-11)(m^2+12)$ 36. $(a^3-3)(a^3+16)$
37. $(p^2+8)(p^2-19)$ 38. $(2a^3+9)(3a^3-5)$
39. $(a+b+1)(3a+3b+2)$ 40. $(2x-2y+3)(3x-3y-5)$
41. $(x^2+x+1)(3x^2+3x-25)$ 42. $(3x+2y-1)(6x+4y-3)$
43. $4(a+2b)(2b-a)$ 44. $(x^2+xy-y^2)(5x^2-13xy-5y^2)$
45. $(x+a)(ax+1)$ 46. $(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)$

প্রশ্নমালা 19

1. b 2. xy 3. m^2n^2 4. $4a^2b^2$
5. $2pq^2$ 6. 7 7. $3ab^2c$ 8. $2xy$
9. $3xy^2z^3$ 10. $7m^2np^3$ 11. $5aby$ 12. $4a^3x^4y^5$
13. $2b$ 14. m 15. ab 16. $3a$
17. p^2 18. 5 19. $3x^2y^2z^2$ 20. $8a^2b^2x^3y^4$
21. $4mn$ 22. $8ac$ 23. $5c^2$ 24. $7p^2q^2r^3$
25. $7abc$ 26. $37a^5b^3c^2$ 27. $9a^2c^2$ 28. $15x^3y^3z^3d^3$

প্রশ্নমালা 20

1. $a(b+c)$ 2. $x+y$ 3. $a+b$ 4. $a+b$
5. $a-b$ 6. $c-d$ 7. $2x+1$ 8. $3a(b+c)$
9. $a-2b$ 10. $a-3b$ 11. $x-1$ 12. $ax(a-x)^2$
13. $a-b$ 14. $x-y$ 15. $a+1$ 16. $a-1$
17. $4(x+2)$ 18. $x(x-5)$ 19. $x+1$ 20. $c-1$
21. $p+9$ 22. $m+3$ 23. $x(x-7)$ 24. $a+3$
25. $x+2y$ 26. $a(a+2)$ 27. $8(x+a)$ 28. $9x^2(x+2a)$
29. $a+b-c$ 30. $x(x+4)$.

প্রশ্নমালা 21

1. $a+1$ 2. $x+1$ 3. $2a-3$ 4. $x-3$
5. $a-2$ 6. x^2-3x+2 7. $a+5$ 8. x^2-2x+1
9. $3a-7$ 10. a^2-3a+7 11. y^2-y+1
12. a^2-3a+2 13. $x-2$ 14. a^2+6a+5
15. $x+3$ 16. $2x+1$ 17. $a+4$
18. x^2+3x+1 19. $3x-1$ 20. $a-2$.

প্রশ্নমালা 22

1. $2a^3b$ 2. x^2y^2z 3. a^3b^3 4. $24m^3n^2p^3$
5. $15x^2yz^3$ 6. abc 7. $x^2y^2z^2$ 8. $6a^2b^2c^2$

9. $a^2b^2c^2$ 10. $45m^3n^2p^3$ 11 $24x^3y^3z^4$ 12. $78c^5d^4$
13. $81a^3b^2c^2x^2$ 14 $30x^2y^3z^4$ 15. $96a^4b^3c^3$
16. $420a^4x^4y^4$ 17. $36a^2bc^3$ 18. $72a^3b^3c^3x^3y^2z^4$
19. $36a^5b^3c^2x^2y^4z^5$ 20. $210a^5b^4c^2$

প্রশ্নমালা 23

1. $a^3(a+2)$ 2. $x(x^2-1)$ 3. $xy(x+y)$
4. $m(m^2-4)$ 5. $a^2(b+c)^2$ 6. $ac(a+b)$
7. $(x-1)^2(x^2+x+1)$ 8. $24(x-y)^2(x+y)(x^2+xy+y^2)$
9. $(a^4-b^4)(a^2+ab+b^2)$ 10. $x(x-1)^2(2x+1)$
11. $(a+1)(a-3)(a+4)$ 12. $(a-1)^2(a+1)(a-2)(a^2+1)$
13. $a^2(a+2)(a-3)(a-5)$
14. $72(x-2)(x+2)(x-5)(x^2-2x+4)$
15. $120xy(x^2-y^2)$ 16. $(a+b)(a-2b)(a-3b)$
17. $12a^3b^2(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)$
18. $(a-b)(a+b)(3a-2b)(a^2+ab+b^2)$
19. $(x+y)(x-2y)(2x-y)$ 20. $(m+1)(m-2)(3m+2)$
21. $(a+2)(2a-1)(3a+1)$ 22. $12(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$
23. $a^2(a-1)(a-2)(a+3)$ 24. $9(a+2x)(a-2x)(2a-x)^2$
25. $180a^3x^3(a+x)^3(a-x)^3$
26. $x^3y(x+y)(x-y)^3(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
27. $a^2b^2(b-2)(b+2)(b^2-2b+4)(b^2+2b+4)$
28. $12a^2(a-3x)^2(a+3x)^2$ 29. $a^2(a+2)^2(2a-1)(2a-7)$
30. $a^2(a-3b)(3a+4b)^2(a^2+3ab+9b^2)$.

প্রশ্নমালা 24

1. $\frac{b^2}{3a}$ 2. $\frac{2p^4}{3}$ 3. $\frac{3a}{7cd}$ 4. $\frac{13ay}{3xz}$
5. $\frac{4}{3}x^2y^2z^2$ 6. $\frac{2mn^3}{3p^4}$ 7. $\frac{2bc^2}{5a}$ 8. $\frac{3yz^2}{2x}$
9. $\frac{e}{a}$ 10. $\frac{a}{2b^2}$ 11. $\frac{z^3}{6x^2}$ 12. 1
13. $\frac{x^3-y^3+z^3}{xyz}$ 14. 0 15. 0 16. $\frac{x}{y}$
17. $\frac{1}{4e}$ 18. $\frac{a+2b}{a}$ 19. $\frac{m+2n}{m(m-2n)}$ 20 $\frac{5p}{p-5}$
21. $\frac{a+1}{a}$ 22. $\frac{3x}{4a^2}$ 23. $x+y$ 24. $\frac{1}{4(a+1)}$

25. $\frac{m(3m+4n)}{m+4}$ 26. $\frac{a^2+ab+b^2}{a}$ 27. $\frac{1}{x-3}$ 28. $\frac{x+3y}{x+y}$

29. 1 30. $\frac{p(p^2-pq+q^2)}{p^2-q^2}$ 31. $\frac{m}{m+3}$ 32. $\frac{x^2-1}{x^2-4}$

33. $\frac{a^2+2a+4}{2a^2}$ 34. 1 35. $x(2+x)$ 36. 1 37. $\frac{1}{2x(x+y)}$

38. $\frac{x+a}{x+y}$

প্রশ্নমালা 25

1. -2 2. 3 3. -3 4. 13 5. 2 6. 2 7. 4
8. $\frac{1}{3}$ 9. 6 10. -6 11. 9 12. 15 13. 6
14. $2\frac{1}{2}$ 15. 15 16. 7 17. $-2\frac{3}{5}$ 18. 4
19. 2 20. 8.

প্রশ্নমালা 26

1. -6 2. 7 3. $\frac{1}{10}$ 4. $-\frac{3}{29}$ 5. 2 6. 1 7. 19
8. $2\frac{3}{5}$ 9. $\frac{1}{4}$ 10. 0 11. 1 12. 5 13. 9
14. $-\frac{7}{5}$ 15. $-\frac{17}{12}$ 16. -1 17. -2 18. $4\frac{7}{23}$ 19. 6
20. $-\frac{3}{2}$ 21. -9 22 13 23. 4 24. 6 25. 7
26. 8 27. $\frac{7}{12}$ 28. $-1\frac{3}{10}$ 29. $-\frac{3}{4}$ 30. $-\frac{3}{2}$ 31. 4
32. 5 33. $-\frac{a+b}{2}$ 34. c 35. $\frac{a+b}{2}$ 36. $\frac{a+b}{2}$

জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায়

পূর্বপাঠের অনুশীলনী

অনুশীলনী 1

1. নিচের প্রশ্নগুলির পাশে বন্ধনীর ভেতরে কয়েকটি সম্ভাব্য উত্তর দেওয়া আছে। সঠিক উত্তরটি বেছে নিয়ে লেখ। সম্ভাব্যস্থলে তোমার উত্তরের সমর্থনে চিত্র অঙ্কন কর :

(i) একটি সমতলে কতগুলি বিন্দু আছে ? (একটি, দুটি, অনেকগুলি)

(ii) একটি সমতলে কতগুলি সরলরেখা আছে ? (একটি, দুটি, অনেকগুলি)

(iii) একটি সরলরেখার উপর কতগুলি বিন্দু আছে ? (একটি, দুটি, অনেকগুলি)

(iv) একটি বিন্দু দিয়ে কতগুলি সরলরেখা আঁকা যায় ? (একটি, দুটি, অনেকগুলি)

(v) একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলিকে কি বলা হয় ? (সমরেখ, সমবিন্দু, সমাপতিত বিন্দু)

(vi) একই বিন্দুগামী সরলরেখাগুলিকে কি বলা হয় ? (সমরেখ, সমাপতিত সরলরেখা, সমবিন্দু)

(vii) একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা অঙ্কন করার জন্য ন্যূনপক্ষে কটি বিন্দুর প্রয়োজন ? (একটি, দুটি, দুই-এর বেশী)

(viii) একটি সমতলে দুটি সরলরেখা কিভাবে অবস্থিত হতে পারে ? (পরস্পরচ্ছেদী ভাবে বা সমান্তরাল ভাবে, পরস্পরচ্ছেদী ভাবে এবং সমান্তরালভাবে, পরস্পরকে ছেদ না করে এবং অসমান্তরালভাবে)

(ix) একটি সমতলে অবস্থিত দুটি সরলরেখা কটি বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করবে ? (একটি, দুটি, অনেকগুলি)

(x) একটি সমতলে অবস্থিত দুটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ না করলে তাদের কি রকম সরলরেখা বলা হয় ? (পরস্পরচ্ছেদী, লম্ব, সমান্তরাল)।

2. একটি বৃত্ত অঙ্কন করে তাতে নিম্নলিখিত চিত্রগুলি দেখাও :

(i) ব্যাসার্ধ (ii) কেন্দ্র (iii) ব্যাস (iv) জ্যা (v) বৃত্তচাপ।

3. নিম্নলিখিত চিত্রগুলি অঙ্কন করে তাদের নাম দাও এবং প্রতিক্ষেত্রে শীর্ষবিন্দু ও বাহুগুলির নাম উল্লেখ কর :

(i) কোণ, (ii) ত্রিভুজ, (iii) চতুর্ভুজ।

4. যে সামতলিক চিত্রগুলির নাম নিচে দেওয়া হল তাদের সংজ্ঞা দাও। সংজ্ঞা থেকে পাওয়া ধর্মগুলি চিত্রের সাহায্যে দেখাও :

(i) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, (ii) সমবাহু ত্রিভুজ, (iii) বিষমবাহু ত্রিভুজ, (iv) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ, (v) সমকোণী ত্রিভুজ, (vi) স্থূলকোণী ত্রিভুজ, (vii) সামান্তরিক, (viii) আয়তক্ষেত্র, (ix) বর্গক্ষেত্র, (x) রম্বস, (xi) ট্রাপিজিয়ম।

5. (ক) কোণের মান অনুসারে কোণের কয়টি ভাগ আছে? কি কি? [মান 0° অপেক্ষা বড় ও 180°-এর মধ্যে।]

(খ) নিম্নলিখিত কোণগুলির কোন্‌টি কোন্‌ ভাগে পড়বে ?

(i) 30°, (ii) 90°, (iii) 175°, (iv) 89°, (v) 180°, (vi) 91°.

6. প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণনে যে-কোন চিত্রের কি কি ধর্মগুলি অপরিবর্তিত থাকে ?

7. নিচের ধর্মগুলি কোন্‌ জ্যামিতিক রূপান্তরে সম্ভব তার নাম লেখ :

(i) কেবল একটি বিন্দু স্থির, (ii) কিছু বিন্দু স্থির, (iii) কিছু সরলরেখা স্থির, (iv) কিছু বিন্দু এবং কিছু সরলরেখা স্থির, (v) কোন বিন্দুই স্থির নয়।

8. নিচের ছকটি পূরণ কর :

রূপান্তরের নাম	যে বিন্দু/বিন্দুগুলি স্থির তাদের নাম	যে সরলরেখা/সরলরেখাগুলি স্থির তাদের নাম
প্রতিফলন		
চলন		
ঘূর্ণন		

9. কোন্‌ জ্যামিতিক রূপান্তরে একটি সরলরেখার রূপান্তরিত চিত্র (প্রতিবিম্ব) ঐ সরলরেখাই বা তার সমান্তরাল সরলরেখা হয় ?

10. দুটি সামতলিক চিত্রকে কখন সর্বসম বলব ?

11. পূর্বে তোমার জানা জ্যামিতিক চিত্রের ধর্মগুলির সাহায্যে নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ

(i) কি হলে দুটি সরলরেখা সমান্তরাল হবে ?

(ii) কি কি শর্তে দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হবে ?

(iii) একটি বৃত্তের দুটি জ্যা সমান দেওয়া আছে। এ থেকে তুমি কি কি সিদ্ধান্ত করতে পার ?

(iv) একটি বৃত্তের দুটি বৃত্তচাপ সমান দেওয়া আছে। এ থেকে তুমি কি কি সিদ্ধান্ত করতে পার ?

(v) একটি বৃত্তের দুটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করেছে। এ থেকে তুমি কি কি সিদ্ধান্ত করতে পার ?

অনুশীলনী 2

1. AB একটি রেখাংশ অঙ্কন করে AB-কে D বিন্দু পর্যন্ত এবং BA-কে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর।

2. AB সরলরেখা থেকে একই দিকে পর পর AX = 3·2 সেমি, XY = 2·6 সেমি ও YZ = 1·9 সেমি রেখাংশ কাট।

3. 3 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

4. একটি 8·1 সেমি রেখাংশ PQ অঙ্কন কর। PQ-কে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

5. 6·4 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশকে সমান চারভাগে ভাগ কর।

6. 8·2 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশের দুটি প্রান্তবিন্দুতে ঐ রেখাংশের উপর লম্ব অঙ্কন কর।

7. 8 সেমি, 6 সেমি ও 10 সেমি বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর এবং শীর্ষবিন্দুগুলি থেকে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্ব টান। কি বৈশিষ্ট্য লক্ষ করলে উল্লেখ কর।

8. ABC একটি ত্রিভুজ যার AB বাহু = 5 সেমি, BC বাহু = 7 সেমি, এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle ABC = 55^\circ$; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং ত্রিভুজের কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

9. একটি রম্বস অঙ্কন কর, যার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 4·8 সেমি এবং একটি কোণ 60°। যে কোন একটি কর্ণ অঙ্কন করে তার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন কর। কি বৈশিষ্ট্য লক্ষ করলে উল্লেখ কর।

10. ABCD একটি চতুর্ভুজ যার AB বাহু = 3 সেমি, BC বাহু = 4 সেমি, CD বাহু = 3·8 সেমি, DA বাহু = 4·3 সেমি এবং $\angle ABC = 90^\circ$; চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

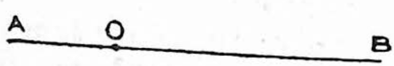
পূর্বে জ্ঞাত ধর্মগুলির তালিকা ও আরও কয়েকটি সংজ্ঞা

2·1. ষষ্ঠ শ্রেণীতে চিত্র অঙ্কন করে ও রেখাংশ, কোণ প্রভৃতি মেপে এবং সপ্তম শ্রেণীতে রূপান্তর (প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণন) এর সাহায্যে কতকগুলি জ্যামিতিক ধর্ম আমরা জানতে পেরেছি। এবার আমরা সামতলিক চিত্রগুলির আরও কতকগুলি জ্যামিতিক ধর্ম জানব এবং সেগুলিকে পূর্বে জ্ঞাত জ্যামিতিক ধর্মগুলি ব্যবহার করে যুক্তির সাহায্যে প্রতিষ্ঠাও (প্রমাণ) করব। প্রমাণ বা প্রতিষ্ঠা করার এই জাতীয় পদ্ধতি গ্রীক গণিতজ্ঞরা বিশেষ করে ইউক্লিড প্রবর্তন করেছিলেন। সেটি হল এ রকম: কয়েকটি প্রাথমিক বক্তব্য রাখা হয় যা অভিজ্ঞতা বা সংজ্ঞা থেকে সহজেই বোঝা যায়। এগুলিকে স্বতঃসিদ্ধ বলা হয়। কতকগুলি সংজ্ঞাও দেওয়া হয়ে থাকে। তারপর ধাপে ধাপে যুক্তি ব্যবহার করে সিদ্ধান্তে আসা হয়। এগুলিকেই বিধিবৎ জ্যামিতিক প্রমাণ বলা হয়। আমরা মূলতঃ ইউক্লিডীয় জ্যামিতির ধর্মগুলিই প্রমাণ করি। তাই বর্তমানে আমরা যে জ্যামিতি পড়াই তাকে ইউক্লিডীয় জ্যামিতি বলি।

2·2 পূর্বে জ্ঞাত ধর্মগুলির তালিকা:

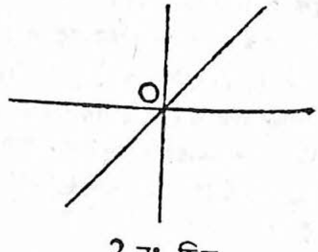
নতুন ধর্মগুলি প্রতিষ্ঠা করার আগে পূর্বে জ্ঞাত ধর্মগুলি আবার মনে করা যাক।

1. যেকোন বিন্দু দিয়ে সব সময়েই সরলরেখা টানা যেতে পারে। 1নং চিত্রে O বিন্দু দিয়ে AB সরলরেখা টানা হয়েছে।



1 নং চিত্র

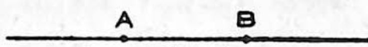
তোমরা জান, প্রকৃতপক্ষে এরূপ অসংখ্য সরলরেখা টানা যেতে পারে (2নং চিত্র)।



2 নং চিত্র

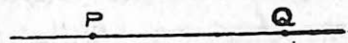
2. দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবল একটি সরলরেখা টানা

যায়। 3নং চিত্রে দেখ, A, B বিন্দু দিয়ে কেবল একটি সরল-রেখাই টানা গেছে।



3 নং চিত্র

3. যেকোন সরলরেখা উভয় দিকে সীমাহীন ভাবে বিস্তৃত (4 নং চিত্র)।



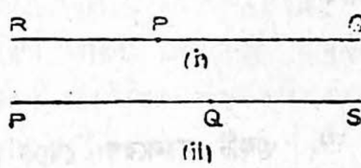
4 নং চিত্র

4. যেকোন রেখাংশ উভয় দিকে সীমাবদ্ধ। 5নং চিত্রে PQ রেখাংশটির দুটি প্রান্ত বিন্দু P ও Q.



5 নং চিত্র

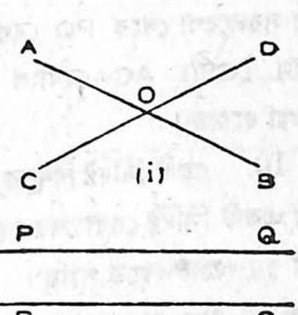
5. একটি রেখাংশকে যে কোনদিকে প্রয়োজন মত বর্ধিত করা যায়। 6(i)নং চিত্রে QP-কে R পর্যন্ত এবং 6(ii) চিত্রে PQ-কে S পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে।



6 নং চিত্র

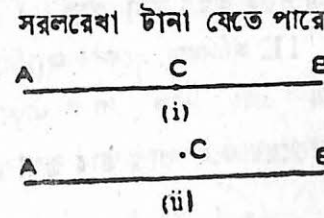
6. একই সমতলে অবস্থিত দুটি সরলরেখা পরস্পরকে একটি বিন্দুতে ছেদ করবে অথবা পরস্পর সমান্তরাল হবে।

7(i) নং চিত্রে AB ও CD সরলরেখা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। 7(ii) নং চিত্রে PQ ও RS সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল।



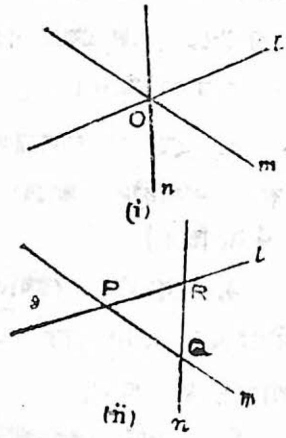
7 নং চিত্র

7. দুই এর বেশী বিন্দু দিয়ে একটি সরলরেখা টানা যেতে পারে [8(i) নং চিত্র], নাও টানা যেতে পারে [8(ii)নং চিত্র]। যদি টানা যায়, তাহলে ঐ বিন্দুগুলিকে সমরেখ বিন্দু বলা হয়। 8(i)নং চিত্রে A, C, B বিন্দু তিনটি সমরেখ, কিন্তু 8(ii) নং চিত্রে বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়।



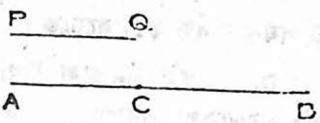
8 নং চিত্র

8. দুই এর বেশী সরলরেখা একই বিন্দু দিয়ে যেতে পারে [9(i)নং চিত্র], নাও যেতে পারে [9(ii)নং চিত্র]। যদি একই বিন্দু দিয়ে যায়, তাহলে তাদের সমবিন্দু সরলরেখা বলব। 9(i)নং চিত্রে l, m, n সরলরেখা তিনটি O বিন্দু দিয়ে গেছে, সুতরাং তারা সমবিন্দু।



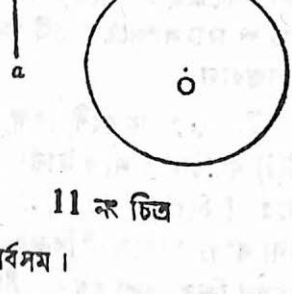
9 নং চিত্র

9. একটি সরলরেখা থেকে যেকোন দৈর্ঘ্যের সমান রেখাংশ কেটে নেওয়া যায়। 10 নং চিত্রে AB সরলরেখা থেকে PQ রেখাংশের সমান দৈর্ঘ্যের AC রেখাংশ কেটে নেওয়া হয়েছে।



10 নং চিত্র

10. একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে আমরা একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন করতে পারি। 11নং চিত্রে O বিন্দুকে কেন্দ্র করে a রেখাংশের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি মাত্র বৃত্তই অঙ্কন করা গেছে।

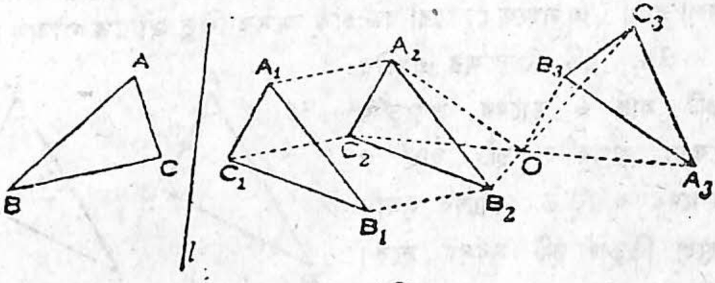


11 নং চিত্র

11. সর্বসমতা : কোন জ্যামিতিক চিত্র এবং এক বা একাধিক রূপান্তরের ফলে প্রাপ্ত তার রূপান্তরিত চিত্র সর্বসম।

12 নং চিত্রে ABC ত্রিভুজটি প্রথমে একটি প্রতিফলনের ফলে $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজে রূপান্তরিত হয়েছে, পরে একটি চলনের ফলে

$A_2B_2C_2$ এবং সর্বশেষে একটি ঘূর্ণনের ফলে $A_3B_3C_3$ ত্রিভুজে রূপান্তরিত হয়েছে।

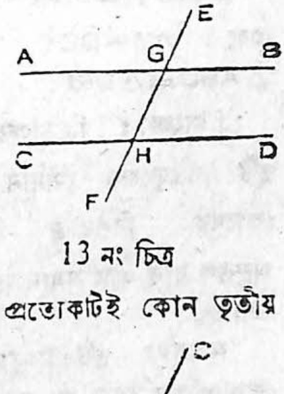


12 নং চিত্র

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle A_3B_3C_3$

[মন্তব্য : সর্বসমতার এই ধারণা আমরা রূপান্তরের মাধ্যমে পেলাম। এটি ইউক্লিডীয় (রূপান্তর) জ্যামিতির অন্তর্গত। পরে এগুলি সম্বন্ধে অনেক কিছু জানতে পারবে।]

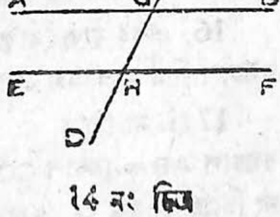
12. দুটি সরলরেখাকে একটি তৃতীয় সরলরেখা ছেদ করলে যদি কোন একজোড়া অনুরূপ কোণ সমান হয়, তাহলে ঐ সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে। 13নং চিত্রে AB ও CD সরলরেখাকে EF সরলরেখা ছেদ করার ফলে একজোড়া অনুরূপ কোণ ∠EGB ও ∠GHD সমান হয়েছে, সুতরাং AB ∥ CD.



13 নং চিত্র

13. দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার প্রত্যেকটিই কোন তৃতীয় সরলরেখার সমান্তরাল হতে পারে না।

14 নং চিত্রে AB ও CD দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা। EF, AB-এর সমান্তরাল হলে EF, CD-এর সমান্তরাল হবে না।

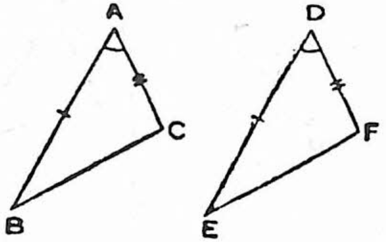


14 নং চিত্র

[মন্তব্য : এই স্বতঃসিদ্ধটিকে প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ বলা হয়। এই স্বতঃসিদ্ধটি ইউক্লিডের পঞ্চম স্বতঃসিদ্ধের একটি রূপ। অনেক

জ্যামিতিবিদ্ এই স্বতঃসিদ্ধটি মেনে নিতে রাজী নন; যার ফলে জ্যামিতির একটি নতুন ধারার সৃষ্টি হয়েছে, যাকে অ-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি বলা হয়। এ সম্বন্ধে তোমরা বড় হয়ে অনেক কিছু জানতে পারবে।]

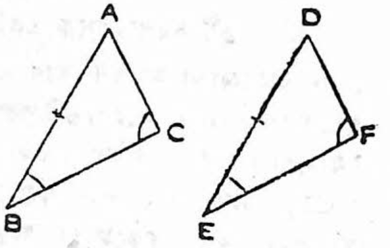
14. দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভূত কোণ অপরটির দুটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভূত কোণের সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে। 15নং চিত্রে △ABC ও △DEF-এর AB = DE, AC = DF এবং ∠BAC = ∠EDF. সুতরাং △ABC ≅ △DEF.



15 নং চিত্র

15. দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণ ও একটি কোণের বিপরীত বাহু, অপরটির দুটি কোণ ও অনুরূপ বাহু সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে। 16 নং চিত্রে ∠ABC = ∠DEF, ∠BCA = ∠EFD এবং AB = DE; সুতরাং △ABC ≅ △DEF.

[**সংজ্ঞা :** ত্রিভুজের ক্ষেত্রে দুটি ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুকে অনুরূপ বাহু এবং সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণকে অনুরূপ কোণ বলা হয়।



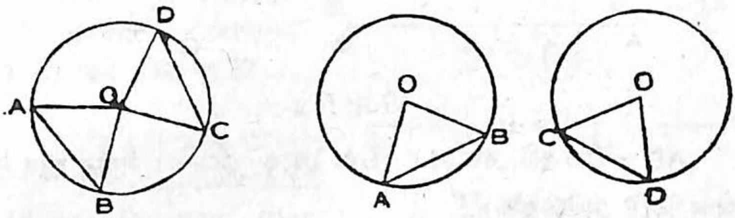
16 নং চিত্র

মন্তব্য : দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে অনুরূপ বাহুগুলি বা অনুরূপ কোণগুলিও সমান হয় এবং দুটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলও সমান হয়।]

16. একই বৃত্তে (বা দুটি সর্বসম বৃত্তে) সমান সমান জ্যা সমান সমান বৃত্তচাপ ছিন্ন করে এবং কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।

17 (i) নং চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে জ্যা AB = জ্যা CD; সুতরাং বৃত্তচাপ AB = বৃত্তচাপ CD এবং ∠AOB = ∠COD. আবার 17(ii) নং চিত্রে O এবং O′ কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি সর্বসম বৃত্তে জ্যা AB = জ্যা CD; সুতরাং বৃত্তচাপ AB = বৃত্তচাপ CD এবং ∠AOB = ∠CO′D.

17. একই বৃত্তে (বা দুটি সর্বসম বৃত্তে) যে দুটি জ্যা সমান সমান বৃত্তচাপ ছিন্ন করে সেই জ্যা দুটি সমান এবং তারা কেন্দ্রে সমান সমান



(i) (ii)

17 নং চিত্র

সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে। 17(i) নং চিত্রে বৃত্তচাপ AB = বৃত্তচাপ CD হলে, জ্যা AB = জ্যা CD এবং ∠AOB = ∠COD হবে।

আবার, 17 (ii) নং চিত্রে বৃত্তচাপ AB = বৃত্তচাপ CD হলে, জ্যা AB = জ্যা CD এবং ∠AOB = ∠CO'D হবে।

18. একই বৃত্তে (বা দুটি সর্বসম বৃত্তে) দুটি জ্যা কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করলে তারা সমান হবে এবং তারা যে দুটি বৃত্তচাপ ছিন্ন করে তারাও সমান হবে। 17 (i) নং চিত্রে ∠AOB = ∠COD হলে, জ্যা AB = জ্যা CD এবং বৃত্তচাপ AB = বৃত্তচাপ CD হবে।

আবার, 17 (ii) নং চিত্রে ∠AOB = ∠CO'D হলে, জ্যা AB = জ্যা CD এবং বৃত্তচাপ AB = বৃত্তচাপ CD হবে।

[জেনে রাখ, দুটি একই দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত সর্বসম।]

2·3. আমরা পরবর্তী অধ্যায়ে জ্যামিতিক ধর্মগুলি প্রতিষ্ঠা করার সময় আরও কয়েকটি তথ্য কাজে লাগাব। সেগুলি চিত্রের সাহায্যে আলোচনা করা হল :

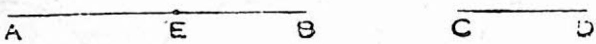
(i) রেখাংশের যোগ ও বিয়োগ :



18 নং চিত্র

AB ও CD দুটি রেখাংশ। AB-কে E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল, যেন BE = CD হয়।

তাহলে, AE রেখাংশ (দৈর্ঘ্য) = AB রেখাংশ (দৈর্ঘ্য) + CD রেখাংশ (দৈর্ঘ্য)

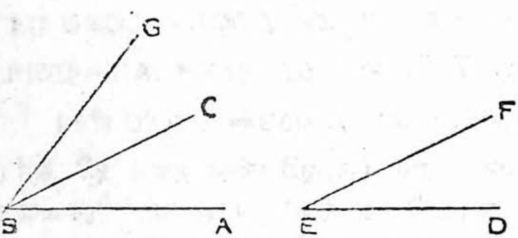


19 নং চিত্র

AB ও CD দুটি রেখাংশ। BA থেকে CD-এর সমান করে BE অংশ কেটে নেওয়া হল।

তাহলে, AE রেখাংশ (দৈর্ঘ্য) = AB রেখাংশ (দৈর্ঘ্য)—CD রেখাংশ (দৈর্ঘ্য)

(ii) **কোণের যোগ ও বিয়োগ ঃ**

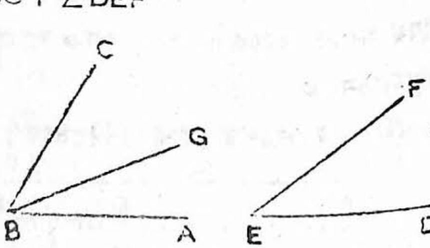


20 নং চিত্র

ABC ও DEF দুটি কোণ B-কে শীর্ষবিন্দু করে BC-কে একটি বাহু নিয়ে ∠DEF-এর সমান করে একটি কোণ আঁকা হল। যেন অপর বাহুটি BA বাহু BC বাহুর যে দিকে আছে তার বিপরীত দিকে পড়ে ;

তাহলে ∠ABG = ∠ABC + ∠DEF

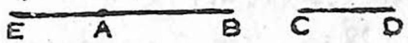
ABC ও DEF দুটি কোণ। B বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু নিয়ে ∠DEF-এর সমান ∠CBG অঙ্কন করা হলো যেন BG বাহু BA বাহুর দিকেই পড়ে।



21 নং চিত্র

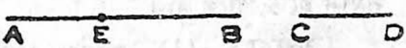
তাহলে ∠ABG = ∠ABC − ∠DEF

[মন্তব্য : দিক বিচার না করলে রেখাংশের ক্ষেত্রে BA-কে CD-এর সমান বর্ধিত করলেও দুটি রেখাংশের যোগফল পাওয়া যেত (চিত্র নং 22)।



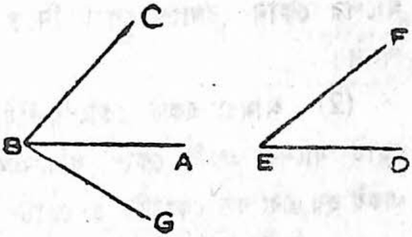
22 নং চিত্র

আবার AB থেকে CD-এর সমান AE অংশ কেটে নিলে দুটি রেখাংশের বিয়োগফল পাওয়া যেত (চিত্র নং 23)।

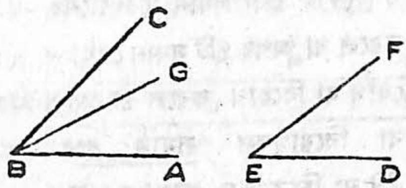


23 নং চিত্র

দিগবিন্যাস বিচার না করলে কোণের ক্ষেত্রে 24 নং চিত্রের মত অঙ্কন করে দুটি কোণের যোগফল এবং 25 নং চিত্রের মত অঙ্কন করে দুটি কোণের বিয়োগফল পাওয়া যেত।

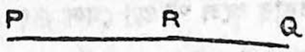


24 নং চিত্র



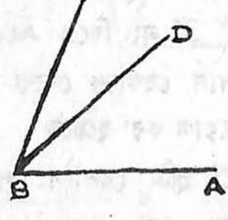
25 নং চিত্র

(iii) কোন একটি রেখাংশ ও সেই রেখাংশটির অংশ সমান নয়। 26 নং চিত্রে PQ রেখাংশ ও PR রেখাংশ সমান নয়।



26 নং চিত্র

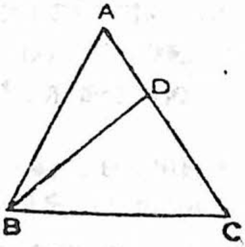
(iv) কোন একটি কোণ ও সেই কোণের একটি অংশ সমান নয়। 27নং চিত্রে ∠ABC ও ∠ABD সমান নয়।



27 নং চিত্র

কোন একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল তার একটি অংশের ক্ষেত্রফলের সমান হতে পারে না।

28 নং চিত্রে △ABC-এর ক্ষেত্রফল, △BDC-এর ক্ষেত্রফলের সমান হতে পারে না।

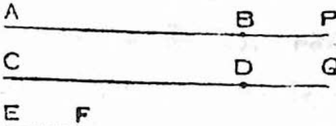


28 নং চিত্র

[মন্তব্য : (1) আমরা একটি রেখাংশ থেকে তার চেয়ে ছোট মাপের কোন রেখাংশ কেটে নিতে পারি।

(2) আমরা একটি কোণের শীর্ষবিন্দুকে শীর্ষবিন্দু করে তার চেয়ে ছোট মানের একটি কোণ যদি এমনভাবে অঙ্কন করি যে একটি বাহু একই হয় এবং বড় কোণটি ও ছোট কোণটির অপর দুটি বাহু সাধারণ বাহুর একই দিকে থাকে, তাহলে ছোট কোণের বাহুটি ভেতরে থাকবে।]

(v) দুটি সমান রেখাংশের সঙ্গে একটি রেখাংশ যোগ বা বিয়োগ করলে বা অপর দুটি সমান রেখাংশ যোগ বা বিয়োগ করলে যোগফল বা বিয়োগফল সমান হবে। 29 নং চিত্রে AB রেখাংশ = CD রেখাংশ। উভয়ের সঙ্গে EF যোগ করার ফলে পাওয়া গেল AP রেখাংশ ও CQ রেখাংশ। তাহলে AP রেখাংশ = CQ রেখাংশ।



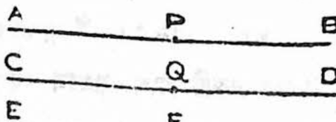
29 নং চিত্র

30 নং চিত্রে AB রেখাংশ = CD রেখাংশ। তাহলে AC রেখাংশ = BD রেখাংশ।



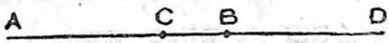
30 নং চিত্র

31 নং চিত্রে AB ও CD দুটি সমান রেখাংশ থেকে EF রেখাংশ বিয়োগ করা হয়েছে। ফলে AP ও CQ দুটি রেখাংশ পাওয়া গেল। তাহলে AP ও CQ রেখাংশ দুটি সমান।



31 নং চিত্র

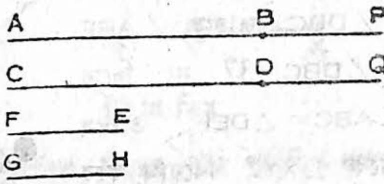
32 নং চিত্রে AB ও CD দুটি সমান রেখাংশ থেকে CB রেখাংশ



32 নং চিত্র

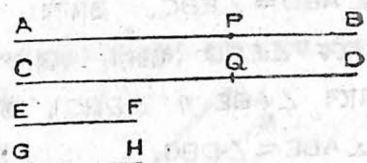
বিয়োগ করে AC ও BD রেখাংশ পাওয়া গেল, তাহলে তারা সমান হবে।

33 নং চিত্রে AB ও CD দুটি সমান রেখাংশ এবং FE ও GH অপর দুটি সমান রেখাংশ। AB রেখাংশের সঙ্গে FE রেখাংশ যোগ করে AP রেখাংশ এবং CD রেখাংশের সঙ্গে GH রেখাংশ যোগ করে CQ রেখাংশ পাওয়া গেল। তাহলে AP রেখাংশ = CQ রেখাংশ।



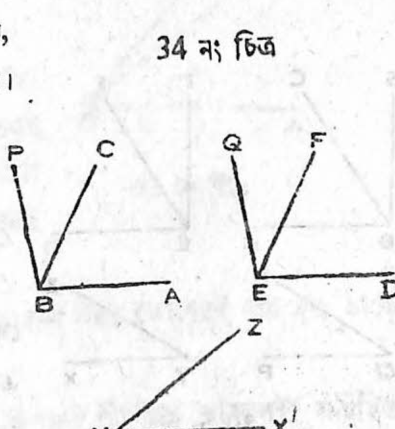
33 নং চিত্র

আবার, 34 নং চিত্রে AB ও CD দুটি সমান রেখাংশ থেকে যথাক্রমে EF ও GH দুটি সমান রেখাংশ বিয়োগ করে AP ও CQ রেখাংশ পাওয়া গেল, তাহলে AP রেখাংশ = CQ রেখাংশ।



34 নং চিত্র

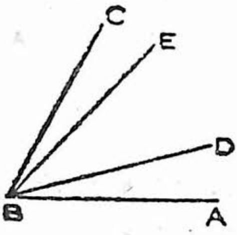
(vi) দুটি সমান কোণের সঙ্গে একটি কোণ যোগ করলে বা তাদের থেকে একটি কোণ বিয়োগ করলে যোগফল বা বিয়োগফল সমান হবে।



35 নং চিত্র

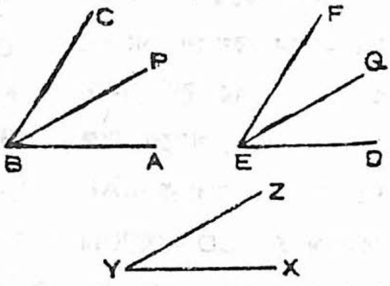
দুটি সমান কোণের সঙ্গে অপর দুটি সমান কোণ যোগ

করলে বা আগের কোণগুলি থেকে পরের কোণগুলি বিয়োগ করলে যোগফল বা বিয়োগফল সমান হবে। 35 নং চিত্রে ∠ABC = ∠DEF তাদের সঙ্গে ∠XYZ যোগ করে পাওয়া গেছে ∠ABP ও ∠DEQ ; তাহলে ∠ABP = ∠DEQ.

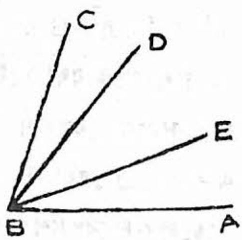


36 নং চিত্র

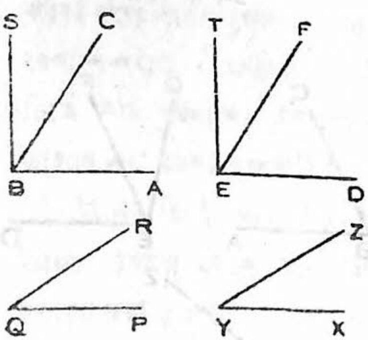
36নং চিত্রে ∠ABD = ∠EBC. তাদের সঙ্গে ∠DBE যোগ করে পাওয়া গেছে ∠ABE ও ∠DBC, তাহলে ∠ABE = ∠DBC. 37 নং চিত্রে ∠ABC = ∠DEF. তাদের থেকে ∠XYZ বিয়োগ করে পাওয়া গেল ∠ABP ও ∠DEQ ; তাহলে ∠ABP = ∠DEQ. আবার, 38নং চিত্রে ∠ABD = ∠EBC. তাদের থেকে ∠EBD বিয়োগ করে পাওয়া যাবে ∠ABE ও ∠DBC ; তাহলে ∠ABE = ∠DBC.



37 নং চিত্র



38 নং চিত্র

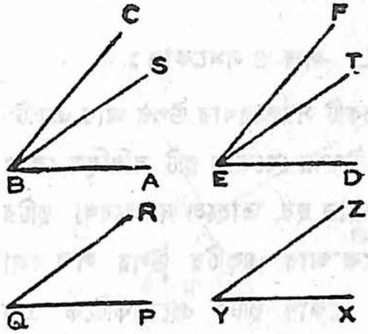


39 নং চিত্র

39 নং চিত্রে ∠ABC = ∠DEF এবং ∠PQR = ∠XYZ ∠ABC-এর সঙ্গে ∠PQR যোগ করে পাওয়া গেল ∠ABS এবং ∠DEF-এর সঙ্গে ∠XYZ যোগ করে পাওয়া গেল ∠DET ; তাহলে ∠ABS = ∠DET.

আবার 40নং চিত্রে ∠ABC = ∠DEF এবং ∠PQR = ∠XYZ.

∠ABC থেকে ∠PQR ও ∠DEF থেকে ∠XYZ বিয়োগ করে যথাক্রমে ∠SBC ও ∠TEF হল: তাহলে, ∠SBC = ∠TEF.



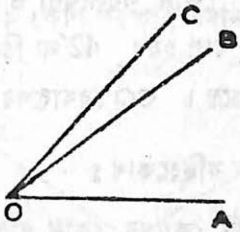
40 নং চিত্র

2·4. আরও কয়েকটি সংজ্ঞা :

তোমরা পূর্বেই কতকগুলি জ্যামিতিক চিত্রের সঙ্গে পরিচিত হয়েছ: এবং কয়েকটি চিত্রের বিধিবদ্ধ সংজ্ঞাও তোমরা জেনেছ। এখানে আরও কয়েকটি চিত্রের সংজ্ঞা দেওয়া হল।

I. সন্নিহিত কোণ :

দুটি কোণের যদি একই শীর্ষবিন্দু ও একটি সাধারণ বাহু থাকে এবং কোণ দুটি যদি সাধারণ বাহুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হয়, তাহলে কোণ দুটিকে সন্নিহিত কোণ বলে।



41 নং চিত্র

41নং চিত্রে ∠AOB ও ∠BOC সন্নিহিত কোণ ; কারণ তাদের একই শীর্ষবিন্দু O, একটি সাধারণ বাহু OB এবং কোণ দুটি সাধারণ বাহুর বিপরীত পাশে অবস্থিত।

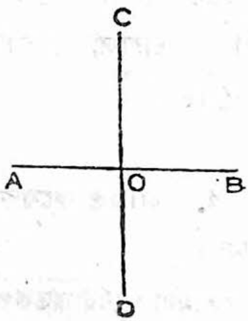
[মন্তব্য : (1) যদি কোন বাহু উভয় কোণেরই বাহু হয়, তাকে সাধারণ বাহু বলে।

(2) লক্ষ কর, সাধারণ বাহু ও একই শীর্ষবিন্দু থাকলেই সন্নিহিত কোণ হয় না। যেমন, ∠AOB ও ∠AOC-এর শীর্ষবিন্দু O, সাধারণ

বাহু OA, তবুও তারা সন্নিহিত কোণ নয়, কারণ কোণ দুটি সাধারণ বাহুর একই পাশে অবস্থিত।]

2. লম্ব ও সমকোণ :

একটি সরলরেখার উপর আর একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হওয়ার ফলে উৎপন্ন যেকোন দুটি সন্নিহিত কোণ যদি সমান হয়, তাহলে সরলরেখা দুটির একটিকে আর একটির উপর লম্ব বলা হয়। কোণ দুটির প্রত্যেকটিকে এক সমকোণ বলা হয়।



42 নং চিত্র

42 নং চিত্রে $CD \perp AB$, $\angle AOC = \angle BOC = 1$ সমকোণ।

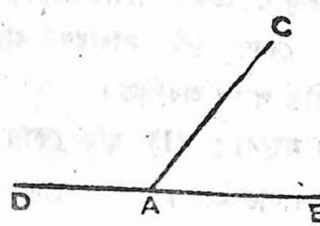
[তোমরা পূর্বেই জেনেছ, 1 সমকোণ $= 90^\circ$]

[মন্তব্য : (1) সমকোণ ও লম্বের সঙ্গে তোমাদের আগেই পরিচয় ঘটেছে। এখানে তাদের বিধিবদ্ধ সংজ্ঞা দেওয়া হল।

(2) কোন সরলরেখা ও তার যেকোন লম্বের ছেদবিন্দুকে লম্বের পাদবিন্দু বলা হয়। 42 নং চিত্রে O পাদবিন্দু। C বিন্দু থেকে লম্বটি টানা হয়েছে। CO রেখাংশের দৈর্ঘ্যকে বলি **'লম্ব-দৈর্ঘ্য'**।]

3. বহিঃকোণ :

একটি কোণের কোন বাহুকে বাহুটির অপরদিকে বর্ধিত করলে যে কোণটি উৎপন্ন হয়, তাকে বহিঃকোণ বলে।



43 নং চিত্র

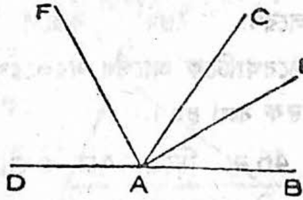
43 নং চিত্রে $\angle BAC$ এর BA বাহুকে বর্ধিত করার ফলে $\angle CAD$ উৎপন্ন হয়েছে। সুতরাং $\angle CAD$ বহিঃকোণ।

4. অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক ঃ

একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডককে অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও তার বহিঃকোণের সমদ্বিখণ্ডককে বহির্দ্বিখণ্ডক বলা হয়।

44 নং চিত্রে ∠BAC-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক AE এবং বহির্দ্বিখণ্ডক AF.

মেপে দেখতো ∠EAF-এর মান কত ?



44 নং চিত্র

5. পূরক ও সম্পূরক কোণ ঃ

পূরক কোণ ঃ দুটি কোণের মানের সমষ্টি এক সমকোণ হলে একটিকে অপরটির **পূরক কোণ** বলা হয়। যেমন, 30° কোণ 60° কোণের পূরক কোণ, 81° কোণ 9° কোণের পূরক কোণ ইত্যাদি।

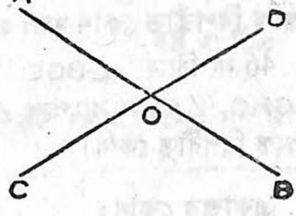
[**মন্তব্য ঃ** একই কোণের দুটি পূরক কোণ পরস্পর সমান।]

সম্পূরক কোণ ঃ দুটি কোণের মানের সমষ্টি দুই সমকোণ হলে, একটিকে অপরটির **সম্পূরক কোণ** বলা হয়। যেমন 135° কোণ 45° কোণের সম্পূরক কোণ, 85° কোণ 95°-কোণের সম্পূরক কোণ ইত্যাদি।

[**মন্তব্য ঃ** একই কোণের দুটি সম্পূরক কোণ পরস্পর সমান।]

6. বিপ্রতীপ কোণ ঃ

দুটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করলে ছেদবিন্দুর বিপরীত পাশে যে এক-এক জোড়া কোণ উৎপন্ন হয় তাদের যেকোন এক জোড়ার একটিকে অপরটির বিপ্রতীপ কোণ বলা হয়।



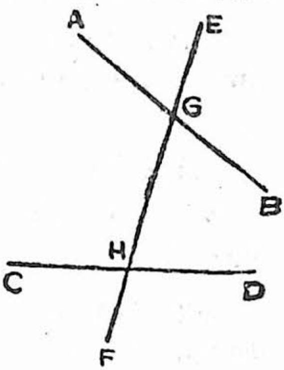
45 নং চিত্র

45নং চিত্রে ∠AOD-এর বিপ্রতীপ কোণ ∠BOC বা ∠BOC-এর বিপ্রতীপ কোণ ∠AOD ; আবার ∠COA-এর বিপ্রতীপ কোণ ∠DOB বা ∠DOB-এর বিপ্রতীপ কোণ ∠COA.

7. ছেদক, বহিঃস্থ কোণ, অন্তঃস্থ কোণ, অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ, একান্তর কোণঃ

ছেদকঃ দুটি সরলরেখাকে একটি সরলরেখা ছেদ করলে পরের সরলরেখাটিকে আগের সরলরেখা দুটির ছেদক বলা হয়।

46 নং চিত্রে AB ও CD সরলরেখার ছেদক EF সরলরেখা।



46 নং চিত্র

অন্তঃস্থ কোণ, বহিঃস্থ কোণঃ

দুটি সরলরেখাকে একটি সরলরেখা ছেদ করার ফলে যে আটটি কোণ উৎপন্ন হয়েছে, তার চারটি সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী অঞ্চলে অবস্থিত। এই চারটি কোণকে **অন্তঃস্থ কোণ** এবং অপর চারটি কোণকে **বহিঃস্থ কোণ** বলা হয়।

46 নং চিত্রে ∠HGB, ∠AGH, ∠GHC এবং ∠DHG অন্তঃস্থ কোণ, আবার ∠BGE, ∠EGA, ∠CHF এবং ∠FHD বহিঃস্থ কোণ।

আরও লক্ষ কর, বহিঃস্থ কোণ ∠BGE সাপেক্ষে ∠HGB সংলগ্ন ও ∠DHG দূরবর্তী। ∠HGB-কে সংলগ্ন অন্তঃস্থ কোণ এবং ∠DHG-কে দূরবর্তী **অন্তঃস্থ কোণ** বলব।

অন্তঃস্থ বিপরীত কোণঃ

কোন বহিঃস্থ কোণের তুলনায় তার দূরবর্তী অন্তঃস্থ কোণকে **অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ** বলা হয়।

46 নং চিত্রে ∠BGE সাপেক্ষে ∠DHG, ∠EGA সাপেক্ষে ∠GHC, ∠CHF সাপেক্ষে ∠AGH এবং ∠FHD সাপেক্ষে ∠HGB অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ।

একান্তর কোণঃ

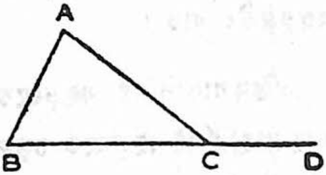
কোন একটি বহিঃস্থ কোণ সাপেক্ষে সংলগ্ন অন্তঃস্থ কোণ এবং দূরবর্তী অন্তঃস্থ কোণের সন্নিহিত যে অন্তঃস্থ কোণ তাদের একটিকে অপরটির **একান্তর কোণ** বলা হয়।

46 নং চিত্রে ∠DHG-এর একান্তর কোণ ∠AGH ইত্যাদি।

[মন্তব্য : তোমরা আগেই জেনেছ অনুরূপ কোণ কাদের বলে। লক্ষ কর, একটি বহিঃস্থ কোণ ও তার অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ পরস্পর অনুরূপ।]

8. ত্রিভুজের **বহিঃস্থ কোণ ও অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ :**

ত্রিভুজের কোন বাহুকে বর্ধিত করলে যে কোণটি উৎপন্ন হয় তাকে ত্রিভুজের **বহিঃস্থ** কোণ এবং ঐ কোণ-সংলগ্ন অন্তঃস্থ কোণ ছাড়া অপর দুটি অন্তঃস্থ কোণের প্রত্যেকটিকে **অন্তঃস্থ বিপরীত** কোণ বলে।



47 নং চিত্র

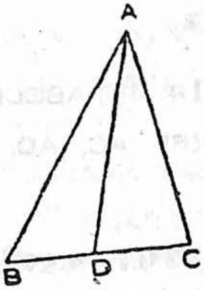
47নং চিত্রে $\triangle$ ABC-এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে। এক্ষেত্রে $\angle$ACD বহিঃস্থ কোণ এবং $\angle$CAB ও $\angle$ABC অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ।

9. **মধ্যমা :**

ত্রিভুজের কোন একটি বাহুর মধ্য-বিন্দুর সঙ্গে বিপরীত শীর্ষবিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে ত্রিভুজের **মধ্যমা** বলে।

48 নং চিত্রে $\triangle$ ABC-এর AD একটি মধ্যমা।

[**মন্তব্য :** যেকোন ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা অঙ্কন করা যায়।]

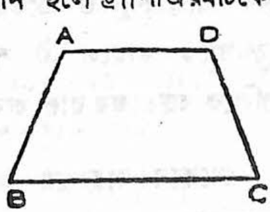


48 নং চিত্র

10. **সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম :**

কোন ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহু দুটি সমান হলে ট্রাপিজিয়মটিকে **সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম** বলে।

49নং চিত্রে ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ও DC তির্যক বাহু দুটি পরস্পর সমান। সুতরাং ABCD ট্রাপিজিয়মটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম।

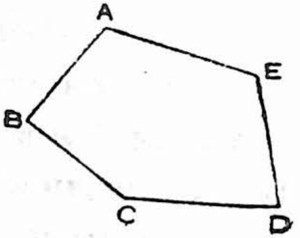


49 নং চিত্র

11. বহুভুজ ঃ

কয়েকটি রেখাংশ দ্বারা গঠিত বদ্ধ সামতলিক চিত্রকে বহুভুজ বলে।

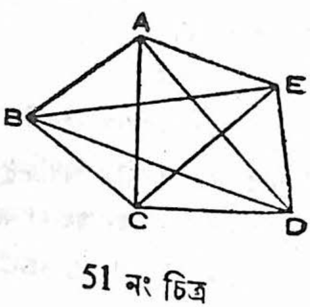
50 নং চিত্রে ABCDE একটি বহুভুজ। AB, BC, CD, DE, EA বহুভুজটির বাহু।



50 নং চিত্র

তিন বাহুবিশিষ্ট বহুভুজকে ত্রিভুজ, চার বাহুবিশিষ্ট বহুভুজকে চতুর্ভুজ, পাঁচ বাহুবিশিষ্ট বহুভুজকে পঞ্চভুজ, ছয় বাহু-বিশিষ্ট বহুভুজকে ষড়ভুজ বলা হয়।

কোন বহুভুজের কোন শীর্ষবিন্দুর সংলগ্ন শীর্ষবিন্দু ছাড়া অপর যেকোন শীর্ষবিন্দুর সঙ্গে ঐ শীর্ষ-বিন্দুকে যোগ করলে যে সব রেখাংশ পাওয়া যায় তাদের বহুভুজের কর্ণ বলা হয়।



51 নং চিত্র

51 নং চিত্রে ABCDE বহুভুজটির কর্ণ হলো AC, AD, BD, BH, CE.

[মন্তব্য ঃ কয়েকটি রেখাংশ দিয়ে যদি একটি সামতলিক চিত্র এমনভাবে গঠিত হয় যে যেকোন রেখাংশের প্রথম প্রান্তবিন্দু পূর্বের রেখাংশের শেষ প্রান্তবিন্দুর সঙ্গে যুক্ত থাকে এবং শেষ রেখাংশের শেষ প্রান্তবিন্দু ও একেবারে প্রথম রেখাংশের প্রথম প্রান্তবিন্দুও যুক্ত থাকে তাহলে ঐ সামতলিক চিত্রকে বহুভুজ বলে। রেখাংশ-গুলিকে বহুভুজের বাহু বলে।

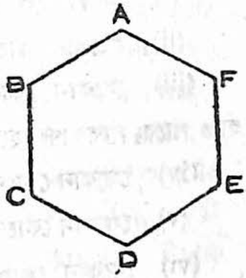
যেকোন বাহু যে সরলরেখায় অবস্থিত, বহুভুজটি যদি সেই সরলরেখার একই পাশে অবস্থিত হয়, তাহলে তাকে কুব্জ বহুভুজ বলা হয়। আমরা বহুভুজ বলতে কুব্জ বহুভুজই বোঝাব।]

12. সুষম বহুভুজ ঃ

একটি বহুভুজের প্রত্যেকটি বাহু ও প্রত্যেকটি কোণ সমান হলে বহুভুজটিকে **সুষম বহুভুজ** বলে।

52 নং চিত্রে ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ।

এর AB বাহু = BC বাহু = CD বাহু = DE বাহু = EF বাহু = FA বাহু এবং ∠ABC = ∠BCD = ∠CDE = ∠DEF = ∠EFA = ∠FAB.



52 নং চিত্র

[মন্তব্য ঃ তিন বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ হ'ল সমবাহু ত্রিভুজ এবং চার বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ হ'ল বর্গক্ষেত্র।]

অনুশীলনী 3

1. চিত্রসহ সংজ্ঞা লেখ ঃ

(i) সন্নিহিত কোণ, (ii) লম্ব, (iii) বিপ্রতীপ কোণ, (iv) মধ্যমা, (v) সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম, (vi) বহুভুজ, (vii) সুষম বহুভুজ।

2. চিত্রাঙ্কন করে জিনিসগুলি দেখিয়ে দাও বা বুঝিয়ে দাও ঃ

(i) একটি কোণের বহিঃকোণ, (ii) একটি ত্রিভুজের বহিঃকোণ ও অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ, (iii) ভেদক, (iv) একান্তর কোণ, (v) অনুরূপ কোণ।

3. পূরক কোণ বলতে কি বোঝ? নিম্নলিখিত কোণগুলির পূরক কোণের মান কত হবে লেখ ঃ

3°, 5°, 18°, 32°, 45°, 50°, 60°, 72°, 80°, 88°.

4. সম্পূরক কোণ বলতে কি বোঝ? নিম্নলিখিত কোণগুলির সম্পূরক কোণের মান নির্ণয় কর ঃ

10°, 30°, 45°, 60°, 90°, 110°, 130°, 143°, 155°, 167°.

5. (i) কত ডিগ্রী কোণের পূরক কোণের মান তার মানের সমান?

(ii) কত ডিগ্রী কোণের সম্পূরক কোণের মান তার মানের সমান?

(iii) কোন্ কোণের পূরক কোণের মান ঐ কোণের মানের অর্ধেক?

(iv) কোন্ কোণের সম্পূরক কোণের মান ঐ কোণের মানের তিন গুণ?

তোমার খাতায় সঠিক বাক্যটির পাশে যে প্রশ্নের নম্বর দেওয়া আছে তা লেখ :

(i) যেকোন কোণের পূরক কোণ মাত্রই সূক্ষ্মকোণ।

(ii) যেকোন কোণের পূরক কোণ মাত্রই স্থূলকোণ।

(iii) যেকোন কোণের পূরক কোণ সূক্ষ্মকোণও হতে পারে, স্থূলকোণও হতে পারে, সমকোণও হতে পারে।

(iv) যেকোন কোণের সম্পূরক কোণ মাত্রই সূক্ষ্মকোণ।

(v) যেকোন কোণের সম্পূরক কোণ মাত্রই স্থূলকোণ।

(vi) যেকোন কোণের সম্পূরক কোণ সূক্ষ্মকোণও হতে পারে, স্থূলকোণও হতে পারে, সমকোণও হতে পারে।

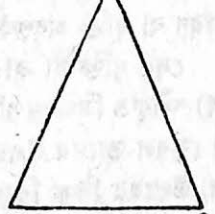
7. একটি কোণ দেওয়া আছে। তার পূরক কোণ ও সম্পূরক কোণ কিভাবে অঙ্কন করবে তা অঙ্কন করে দেখাও।

তৃতীয় অধ্যায়

জ্যামিতিক ধর্মের প্রমাণ

3·1. **উপপাদ্য :** আগেই জেনেছ যে কতকগুলি জ্যামিতিক ধর্মের প্রতিষ্ঠা করতে আমরা একটি পদ্ধতি গ্রহণ করে থাকি, যাকে অন্যভাবে প্রমাণ বলে থাকি। যা প্রমাণ করতে হবে, সেই প্রমাণের পদ্ধতি (অঙ্কন-সহ) ও সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া—সামগ্রিকভাবে এই পর্যায়গুলিকে আমরা উপপাদ্য বলে থাকি। উপপাদ্যের চারটি অংশ। জ্যামিতিক ধর্মের যে বিবৃতিটি দেওয়া হয়, তাকে **সাধারণ নির্বচন** বলে। যেমন, একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু সমান হলে, তাদের বিপরীত কোণগুলি সমান হবে, প্রমাণসহ এই জ্যামিতিক ধর্মটি একটি উপপাদ্য। বিবৃতিটি ঐ উপপাদ্যের সাধারণ নির্বচন। সাধারণ নির্বচনের একটি অংশ হলো যা বা যে শর্ত দেওয়া আছে, যেমন, এক্ষেত্রে এই অংশটি হলো, 'একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু সমান', অপর অংশ হল যা প্রমাণ করতে হবে : অর্থাৎ যে ধর্মটিকে প্রতিষ্ঠা করতে হবে, যেমন এক্ষেত্রে 'তাদের বিপরীত কোণগুলি সমান হবে'—এই অংশটি।

উপপাদ্যের দ্বিতীয় অংশকে বলা হয় **বিশেষ নির্বচন**। সাধারণ নির্বচনকে অনুসরণ করে চিত্রাঙ্কন করতে হবে। সেই চিত্রের নামকরণ অনুসারে বিবৃতির প্রকাশকে বলা হয় বিশেষ নির্বচন।



53 নং চিত্র

যেমন পূর্বে উল্লিখিত উপপাদ্যের ক্ষেত্রে বিশেষ নির্বচন হবে,

ধরা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ যার AB বাহু = AC বাহু (চিত্র নং 53)।

প্রমাণ করতে হবে যে $\angle ACB = \angle ABC$.

এর পরের অংশকে বলা হয় অঙ্কন। উপপাদ্যটি প্রমাণ করার জন্য কোন কোন সময়ে চিত্রে আরও কিছু অঙ্কন করে নিতে হয়। তার বিবৃতিকে বলা হয় অঙ্কন। পরবর্তীকালে দেখবে উপরে উল্লিখিত উপপাদ্যের ক্ষেত্রে $\angle BAC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করার প্রয়োজন হবে (চিত্র নং 54)।



54 নং চিত্র

[**মন্তব্য :** কোন কোন উপপাদ্য প্রমাণের জন্য অঙ্কনের প্রয়োজন নাও হতে পারে।]

শেষ অংশ হল প্রমাণ, যেভাবে শৃঙ্খলাবদ্ধ যুক্তির সাহায্যে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা হয় তার বিবৃতি।

[**মন্তব্য :** উপপাদ্য প্রমাণ করার সময় নিম্নলিখিত বিষয়গুলির উপর লক্ষ রাখতে হবে :

(i) চিত্রাঙ্কন অবশ্যই প্রয়োজন। (তোমাদের প্রথম প্রথম নিখুঁত চিত্র অঙ্কন করাই ভাল)।

(ii) চিত্রটি পেন্সিল দিয়ে পরিষ্কার করে অঙ্কন করবে। যে অক্ষরগুলি দিয়ে চিত্রের নামকরণ করবে সেগুলিকে কালিতে লিখবে।

(iii) চিত্রের নামের সঙ্গে যেন পরবর্তী বিবৃতিগুলির মিল থাকে। তোমরা বইতে যে নামকরণের সঙ্গে অভ্যস্ত হবে, অনেক সময় অন্য নামকরণ করেই তোমাদের প্রশ্ন করা হতে পারে। সেজন্য প্রতিটি উপপাদ্য তোমরা নিজেরাই বিভিন্ন নামকরণ করে অভ্যাস করবে।

(iv) প্রমাণ করার জন্য যা যা অঙ্কন করতে হবে তা চিত্রে অঙ্কন করে নেবে এবং তার উল্লেখ অবশ্যই থাকতে হবে।

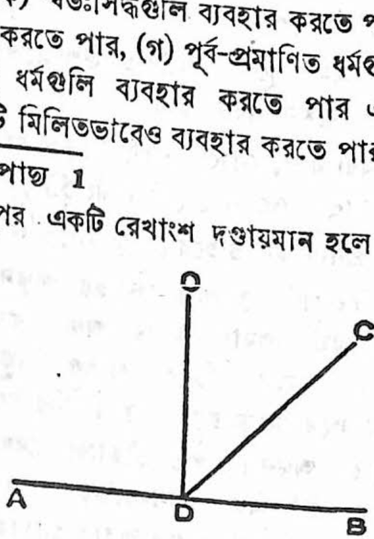
(v) প্রমাণ করার সময় যখনই যেকোন সিদ্ধান্ত করা হবে তার কারণ বা যুক্তি অবশ্যই উল্লেখ করতে হবে।

সেই যুক্তি বা কারণের জন্য (ক) স্বতঃসিদ্ধগুলি ব্যবহার করতে পার, (খ) স্বীকৃত সিদ্ধান্তগুলি ব্যবহার করতে পার, (গ) পূর্ব-প্রমাণিত ধর্মগুলি বা কেবল তাদের উপর নির্ভরশীল ধর্মগুলি ব্যবহার করতে পার এবং (ঘ) উপরের কিছু কিছু বা সব কটি মিলিতভাবেও ব্যবহার করতে পার।]

উপপাদ্য 1

একটি সরলরেখার উপর অপর একটি রেখাংশ দণ্ডায়মান হলে যে দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, তাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

ধরা যাক, AB সরলরেখার D বিন্দুতে DC রেখাংশ দণ্ডায়মান হওয়ার ফলে ∠BDC ও ∠CDA দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়েছে।



55 নং চিত্র

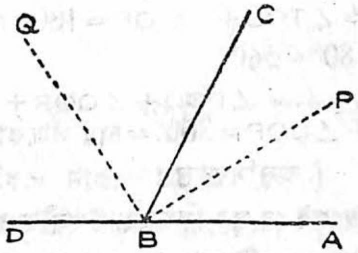
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BDC + \angle CDA = 2$ সমকোণ।

অঙ্কন : AB সরলরেখার D বিন্দুতে ঐ সরলরেখার উপর DO লম্ব টানা হল।

প্রমাণ : $\angle BDC + \angle CDA = \angle BDC + \angle CDO + \angle ODA$
$= \angle BDO + \angle ODA$
$= 1$ সমকোণ $+ 1$ সমকোণ [$\because OD \perp AB$]
$= 2$ সমকোণ

[**মন্তব্য :** আমরা জানি কোন সরলরেখার কোন বিন্দুতে লম্ব টানলে দুটি সমকোণ পাওয়া যায়। তাই লম্ব টানা হল]।

অনুসিদ্ধান্ত 1. কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত হয়। $\angle ABC$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BP ও BQ.



56 নং চিত্র

$\therefore \quad \angle PBC = \frac{1}{2} \angle ABC$

এবং $\angle CBQ = \frac{1}{2} \angle CBD$

$\therefore \quad \angle PBC + \angle CBQ = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle CBD)$

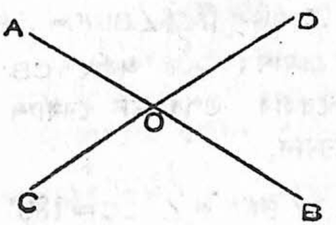
বা, $\angle PBQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

$\therefore \quad PB \perp BQ.$

অনুসিদ্ধান্ত 2. দুটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করলে যে চারটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাদের সমষ্টি চার সমকোণের সমান।

AB ও CD সরলরেখা দুটি O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে।

$\because$ AB সরলরেখার উপর OC দণ্ডায়মান, $\therefore \angle AOC + \angle COB = 2$ সমকোণ। আবার AB সরলরেখার উপর OD দণ্ডায়মান বলে $\angle BOD + \angle DOA = 2$ সমকোণ।



57 নং চিত্র

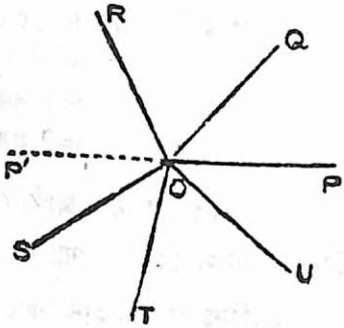
$\therefore \quad \angle AOC + \angle COB + \angle BOD + \angle DOA = 4$ সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত 3. O বিন্দু থেকে কতকগুলি রেখাংশ নির্গত হয়ে ক্রমানুসারে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয়েছে, তাদের সমষ্টি চার সমকোণের সমান।

PO-কে P′ পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। ∴ ∠POQ + ∠QOR + ∠ROP = 180°

আবার, ∠P′OS + ∠SOT + ∠TOU + ∠UOP = 180°

∴ ∠POQ + ∠QOR + ∠ROP′ + ∠P′OS + ∠SOT + ∠TOU + OP = 180° ।
80° = 360°



58 নং চিত্র

∴ ∠POQ + ∠QOR + ∠ROS + ∠SOT + ∠TOU + ∠UOP = 360° = চার সমকোণ।

[অনুসিদ্ধান্তঃ কোন একটি উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত থেকে খুব সহজেই যে সব সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় তাদের অনুসিদ্ধান্ত বলব।]

কয়েকটি প্রয়োগ ;

1. 59নং চিত্র থেকে x-এর মান নির্ণয় কর।

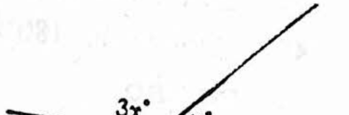
উত্তরঃ $x^\circ + 3x^\circ = 180^\circ$

বা, $x + 3x = 180$

বা, $4x = 180$

বা, $x = \frac{180}{4} = 45$

∴ x এর মান 45.



59 নং চিত্র

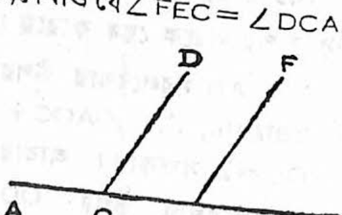
2. 60নং চিত্রে ∠BEF = ∠ECD; দেখাও যে ∠FEC = ∠DCA.

প্রমাণ: AB অর্থাৎ CB সরলরেখার উপর EF রেখাংশ দণ্ডায়মান,

∴ ∠BEF + ∠ _C = 180°

আবার AB অথাং AE সরলরেখার উপর **CD দণ্ডায়মান,**

ECD + ∠DCA = 180°



60 নং চিত্র

$\therefore \quad \angle BEF + \angle FEC = \angle ECD + \angle DCA$

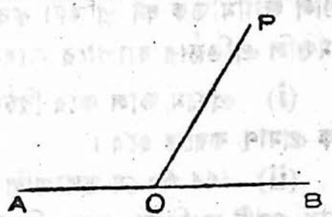
কিন্তু $\angle BEF = \angle ECD$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore \quad \angle FEC = \angle DCA$

অনুশীলনী 4

1. PQ সরলরেখার উপর RS রেখাংশ দণ্ডায়মান হয়েছে। $\angle PRS = 42^\circ$ হলে $\angle SRQ$-এর মান কত ?

2. একটি সরলরেখার উপর একটি রেখাংশ দণ্ডায়মান হয়ে যে দুটি কোণ উৎপন্ন হয়েছে, চাঁদা দিয়ে মেপে একটি ছেলে তাদের মান $56{\cdot}2^\circ$ ও $123{\cdot}3^\circ$ পেল। তার মাপে মোটের উপর কত ভুল হল ?

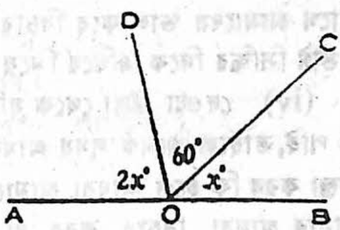


61 নং চিত্র

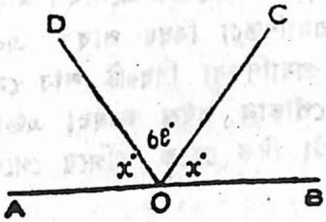
3. 61নং চিত্রে $\angle AOP$, $\angle BOP$-এর চেয়ে 50° বড় হলে, কোন্ কোণের মান কত নির্ণয় কর।

4. একটি রেখাংশ একটি সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হয়ে যে দুটি কোণ উৎপন্ন করেছে তার একটি অপরটির দ্বিগুণ হলে, কোণ দুটির কোন্‌টির মান কত হবে ?

5. 62নং চিত্র থেকে x-এর মান নির্ণয় কর।



62 নং চিত্র



63 নং চিত্র

6. 63 নং চিত্র থেকে x-এর মান নির্ণয় কর। $\angle DOC$-এর সমদ্বিখণ্ডকের সঙ্গে AB-এর সম্পর্ক কি ?

7. প্রমাণ কর যে, একটি সরলরেখার কোন একটি বিন্দুতে একটির বেশী লম্ব অঙ্কন করা যাবে না।

8. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB, AC জ্যা দুটি সমান। প্রমাণ কর যে, বর্ধিত AO, $\angle BOC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

9. দুটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করলে যে চারটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাদের একটি সমকোণ হলে, প্রমাণ কর যে অপর তিনটিও সমকোণ।

10. $\triangle PQR$-এর $\angle PQR = \angle PRQ$. QR ও RQ-কে বর্ধিত করার ফলে যে দুটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হ'ল, প্রমাণ কর যে তারা সমান।

11. $\triangle XYZ$-এর $\angle XYZ = \angle XZY$; XY ও XZ-কে বর্ধিত করার ফলে যে দুটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হ'ল, প্রমাণ কর যে তারা সমান।

[প্রয়োগ ঃ যে সব জ্যামিতিক ধর্ম আমরা পেয়েছি (স্বতঃসিদ্ধ বা স্বীকৃত সিদ্ধান্ত) বা পরবর্তীকালে পাব (উপপাদ্য) সেগুলি আরও কতকগুলি জ্যামিতিক ধর্ম প্রতিষ্ঠা করার জন্য প্রয়োগ করব। ঐ অতিরিক্ত ধর্মগুলি প্রতিষ্ঠার ব্যাপারে আমরা নিম্নলিখিত উপায়ে অগ্রসর হব।

(i) প্রথমে ভাল করে বিচার করে নেব কি কি দেওয়া আছে এবং কি প্রমাণ করতে হবে।

(ii) এর পর যে তথ্যগুলি দেওয়া আছে তা থেকে কি কি পাই তার একটি তালিকা করে নিতে হবে বা মনে মনে ভেবে নিতে হবে। এর যেগুলি আমাদের আলোচিত ধর্মটি প্রমাণ করতে সাহায্য করবে সেগুলিই বিচার করব এবং অন্যগুলি বাতিল করে দেব। যেগুলি আমাদের প্রয়োজন সেগুলিই প্রথম থেকে বেছে নিতে হবে।

(iii) প্রয়োজন হলে বিশেষ অঙ্কন করে নিতে হবে। অঙ্কন করার আগে আমাদের ভাল করে বিচার করে নিতে হবে কোন্ অঙ্কন আমাদের অভীষ্ট সিদ্ধির দিকে এগিয়ে নিয়ে যাবে।

(iv) দেওয়া তথ্য থেকে যদি সহজেই আমরা প্রমাণের পথ খুঁজে না পাই, তাহলে অনেক সময় আমরা উলটো দিক থেকে এগোব। আমরা চিন্তা করব কি হলে আমরা আমাদের প্রমাণিতব্য বিষয় পাব। এবার আবার আমরা বিচার করব যা হলে প্রমাণিতব্য বিষয়টি পাব সেটি আবার কি হলে পাব। দেওয়া তথ্যে পৌঁছান পর্যন্ত আমরা এভাবে এগোব। তাহলে এবার আবার উলটো দিক থেকে এগিয়ে গেলেই ধর্মটি প্রমাণ করা যাবে।

(v) প্রমাণের পদ্ধতিটি বুঝে নেওয়ার পর সবকটি ধাপ যুক্তিসহ শৃঙ্খলাবদ্ধভাবে লিখতে হবে]

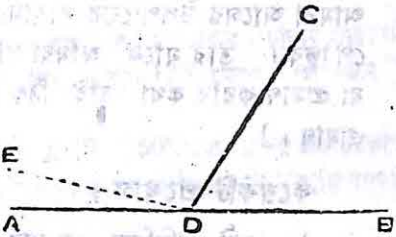
[মন্তব্য : (1) যাতে সঠিক ক্ষেত্রে সঠিক ধর্মটি প্রয়োগ করা যায়, তার জন্য প্রাপ্ত সকল ধর্মগুলি এবং কি শর্তে সেগুলি প্রতিষ্ঠা করা গেছে তা মুখস্থ রাখতে হবে।

(2) কোন একটি ধর্ম প্রতিষ্ঠা করার সময় লক্ষ রাখতে হবে যে এমন কোন ধর্ম যেন আমরা ব্যবহার না করি যার সঙ্গে পূর্বেই আমরা পরিচিত হইনি বা যা প্রতিষ্ঠা করার সময় আলোচ্য ধর্মটি ব্যবহার করার প্রয়োজন হয়েছে।]

উপপাদ্য 2

দুটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হলে, ঐ দুই কোণের বহিঃস্থ বাহু দুটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হবে।

ধরা যাক, দুটি সন্নিহিত কোণ $\angle BDC$ ও $\angle CDA$-এর সমষ্টি দুই সমকোণের সমান এবং সন্নিহিত কোণ দুটির বহিঃস্থ বাহুদ্বয় DA ও DB.



64 নং চিত্র

প্রমাণ করতে হবে যে DA ও DB একই সরলরেখায় অবস্থিত।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক DA ও DB একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়। BD-কে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো।

∴ BE সরলরেখার উপর DC রেখাংশ দণ্ডায়মান।

∴ $\angle BDC + \angle CDE = 2$ সমকোণ।

আবার $\angle BDC + \angle CDA = 2$ সমকোণ (কল্পনানুসারে),

∴ $\angle EDC + \angle CDE = \angle BDC + \angle CDA$

∴ $\angle CDE = \angle CDA$.

এ দুটি সমান কোণের একটি বাহু সাধারণ এবং অপর বাহু দুটি একই দিকে অবস্থিত বলে বাহু দুটি একটির সঙ্গে অপরটি মিশে যাবে অর্থাৎ DA ও DB একই সরলরেখায় নয় এই সিদ্ধান্তই ভুল।

∴ DA ও DB এক সরলরেখায় অবস্থিত হবে।

[মন্তব্য : লক্ষ কর, এই উপপাদ্যটিতে যা প্রমাণ করতে বলা হয়েছে তা উপপাদ্য 1-এ কল্পনা করে নেওয়া হয়েছে ; আর এখানে যা কল্পনা করে নেওয়া হয়েছে তা উপপাদ্য 1-এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করতে হয়েছিল। এরূপ দুটি উপপাদ্যের দ্বিতীয়টিকে প্রথমটির বিপরীত উপপাদ্য বলা হয়।

মনে রেখ, যেকোন উপপাদ্য সিদ্ধ হলে, তার বিপরীত উপপাদ্য

সিদ্ধ হবে এমন কোন মানে নেই। তোমরা ত্রিভুজের সর্বসমতা সম্বন্ধে সপ্তম শ্রেণীতেই পড়েছ। দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ অপর ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমান হবে। এর বিপরীত উপপাদ্য হবে দুটি ত্রিভুজের একটির তিনটি কোণ অপরটির তিনটি কোণের সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। এই উপপাদ্যটি কিন্তু সিদ্ধ নয়। কাজেই বিপরীত উপপাদ্যের সিদ্ধি প্রমাণ সাপেক্ষ।

সাধারণত বিপরীত উপপাদ্য নিম্নলিখিত উপায়ে প্রমাণ করা হয়;

যা প্রমাণ করার কথা তা হবে না ধরে নিতে হয় এবং তা ধরে নিয়ে আমরা আগের উপপাদ্যের সাহায্য নিয়ে একটি ভুল বা অবাস্তব সিদ্ধান্তে পৌঁছুব। তার মানে আমরা যা ধরে নিয়েছিলাম তা ঠিক নয় অর্থাৎ যা প্রমাণ করার কথা তাই ঠিক। এরূপ প্রমাণকে বলা হয় পরোক্ষ প্রমাণ।]

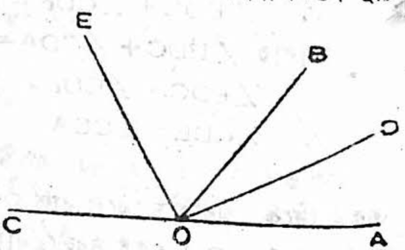
কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. দুটি সন্নিহিত কোণের মান 33° ও 147° ঐ কোণ দুটির বাইরের দিকের বাহু দুটি কিভাবে অবস্থিত হবে ?

উত্তর ঃ যেহেতু কোণ দুটির মানের সমষ্টি $= 33° + 147° = 180°$

সুতরাং বাইরের দিকের বাহু দুটি এক সরলরেখায় অবস্থিত হবে।

2. দুটি সন্নিহিত কোণ $\angle AOB$ ও $\angle DOC$-এর সমদ্বিখণ্ডক দুটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে A, O, C বিন্দু তিনটি সমরেখ।



65 নং চিত্র

ধরা যাক, OD ও OE যথাক্রমে $\angle AOB$ ও $\angle BOC$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \quad \angle AOB = 2\angle BOD$

এবং $\angle BOC = 2\angle BOE$

$\therefore \quad \angle AOB + \angle BOC = 2(\angle BOD + \angle BOE)$

$= 2\angle EOD$

$\because \quad OD \perp OE, \quad \therefore \quad \angle EOD = 2$ সমকোণ

$\therefore \quad \angle AOB + \angle BOC = 1$ সমকোণ

$\therefore$ OA এবং OC একই সরলরেখায় অবস্থিত

$\therefore$ A, O, C বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অনুশীলনী 5

1. দুটি সন্নিহিত কোণের মান 77° ও 103°. সন্নিহিত কোণ দুটির বাইরের দিকের বাহুদ্বয় কি ভাবে অবস্থিত হবে ?

2. ∠AOB = 105° এবং ∠BOC = 75° দুটি কোণ চাঁদার সাহায্যে একটি ছেলে এমন ভাবে আঁকল যে OA ও OC, OB-এর বিপরীত পাশে থাকে। AO-কে বর্ধিত করে দেখল যে OCএর সঙ্গে মিলছে না। কোণগুলি কি ঠিক মাপে আঁকা হয়েছিল ? যুক্তি দাও।

3. O বিন্দুতে একই দিকে পর পর ∠AOB = 20°, ∠BOC = 55°, ∠COD = 81° এবং ∠DOE = 24° অঙ্কন করা হ'ল।

OA এবং OE কি ভাবে অবস্থিত ?

4. 64 নং চিত্রে BD-কে বর্ধিত না করে BD-এর উপর লম্ব টেনে উপপাদ্য 2 প্রমাণ কর।

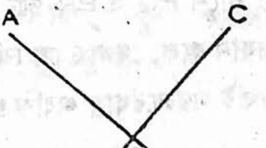
5. চাঁদার সাহায্যে একটি 55° কোণ অঙ্কন কর। এবার (চাঁদার সাহায্য না নিয়ে) কেবল রুলারের সাহায্যে কি ভাবে একটি 125° কোণ অঙ্কন করবে ? যুক্তি দাও।

6. ∠POR ও ∠ROS-এর মান যথাক্রমে 100°, 50°. কত মাপের একটি কোণ ∠SOT অঙ্কন করলে OP এবং OT একই সরলরেখায় অবস্থিত হবে ? যুক্তি দাও।

উপপাদ্য 3

দুটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হবে।

ধরা যাক, AB ও CD সরলরেখা দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।



66 নং চিত্র

প্রমাণ করতে হবে যে (i) ∠AOD = বিপ্রতীপ ∠BOC এবং (ii) ∠DOB = বিপ্রতীপ ∠COA.

প্রমাণ : যেহেতু AB সরলরেখার উপর OC রেখাংশ দণ্ডায়মান।

∴ ∠BOC + ∠COA = দুই সমকোণ।

আবার, যেহেতু DC সরলরেখার উপর OA রেখাংশ দণ্ডায়মান,

∴ ∠COA + ∠AOD = দুই সমকোণ

∴ ∠COA + ∠AOD = ∠BOC + ∠COA

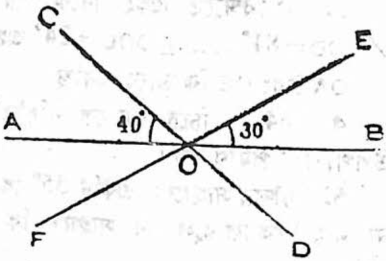
∴ ∠AOD = ∠BOC

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যাবে যে, ∠DOB = ∠COA.

[মন্তব্য : তোমরা সপ্তম শ্রেণীতে ঘূর্ণনের ধর্ম পড়েছ। O বিন্দু সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ∠BOA পরিমাণ ঘূর্ণন প্রয়োগ করেও এই উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়। এর সত্যতা তোমরা যাচাই করে দেখতে পার।]

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. 67 নং চিত্র থেকে ∠FOD-এর মান নির্ণয় কর।



67 নং চিত্র

উত্তর : $\angle AOC + \angle COE + \angle EOB = 180°$

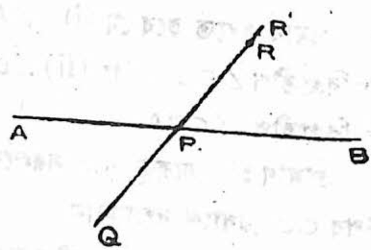
$\therefore \quad 40° + \angle COE + 30° = 180°$

$\therefore \quad \angle COE = 180° - (40° + 30°) = 180° - 70° = 110°$.

আবার CD ও EF সরলরেখা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore \quad \angle FOD =$ বিপ্রতীপ $\angle COE = 110°$.

2. AB সরলরেখার উপর P একটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে AB-এর দু পাশে PQ ও PR দুটি রেখাংশ টানা হল। ∠APQ ও ∠BPR সমান হলে, দেখাও যে PQ ও PR একই সরলরেখায় অবস্থিত।



68 নং চিত্র

প্রমাণ : QP-কে R′ পর্যন্ত বর্ধিত করা হ'ল।

$\therefore \quad \angle APQ =$ বিপ্রতীপ $\angle BPR'$

কিন্তু $\angle APQ = \angle BPR$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore \quad \angle BPR = \angle BPR'$.

$\therefore$ PR, PR′-এর সঙ্গে মিশে যাবে।

$\therefore$ PQ ও PR একই সরলরেখায় অবস্থিত হবে।

বিকল্প প্রমাণ :

AB সরলরেখার উপর PQ রেখাংশ দণ্ডায়মান,

$\therefore$ $\angle APQ + \angle QPB$ = দুই সমকোণ,

কিন্তু $\angle APQ = \angle BPR$ (কল্পনানুসারে),

$\therefore$ $\angle QPB + \angle BPR = 2$ সমকোণ।

$\therefore$ PQ ও PR একই সরলরেখায় অবস্থিত।



69 নং চিত্র

অনুশীলনী 6

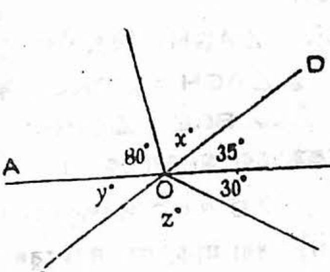
1. AB ও CD সরলরেখা দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle BOC = 70^\circ$ হলে, অপর কোণগুলির মান কত ?

2. দুটি সরলরেখা পরস্পরকে এমনভাবে ছেদ করে যে এক জোড়া বিপরীপ কোণের সমষ্টি 110° হয়। প্রত্যেকটি কোণের মান নির্ণয় কর।

3. AB ও CD সরলরেখা দুটি O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। $\angle DOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$-র সমষ্টি 240° হলে (i) $\angle DOB$-র মান 50° (ii) $\angle DOB$-এর মান 80° হতে পারে কি ? যুক্তি দাও।

4. AB ও CD সরলরেখা দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle BOD$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডককে বর্ধিত করলে কি তা $\angle AOC$-কেও সমদ্বিখণ্ডক করবে ? যুক্তি দাও।

5. 70নং চিত্রে AB ও CD সরলরেখা দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। x, y ও z-এর মান নির্ণয় কর।



70 নং চিত্র

6. AB ও CD সরলরেখা দুটি O বিন্দুতে ছেদ পরস্পরকে করেছে। $\angle AOD$ ও $\angle BOC$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে OX এবং OY. প্রমাণ কর যে OX, OY একই সরলরেখায় অবস্থিত।

7. AB ও CD রেখাংশ দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ কর যে $\triangle AOD \cong \triangle BOC$.

8. রেখাংশ AB=রেখাংশ AC, কিন্তু তারা একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় ; BA ও CA-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হ'ল যে AD=AE হয়। প্রমাণ কর যে △CAD≅△BAE.

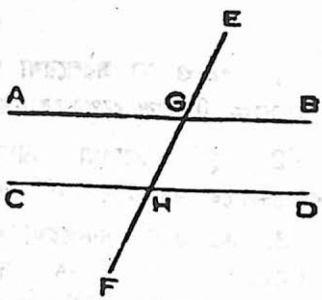
9. PQ ও RS রেখাংশ দুটি পরস্পরকে X বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে XP=XR হয়। ∠PSX ও ∠RQX সমান হলে, প্রমাণ কর যে △PXS≅△RQS.

উপপাদ্য 4

একটি সরলরেখা অপর দুটি সরলরেখাকে ছেদ করলে যদি (i) এক জোড়া একান্তর কোণ সমান হয়,

অথবা (ii) ভেদকের একই পাশে অবস্থিত দুটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়, তাহলে অপর সরলরেখা দুটি সমান্তরাল হবে।

ধরা যাক, EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখা দুটিকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে।



71 নং চিত্র

(i) ধরা যাক, ∠AGH=একান্তর ∠DHG

প্রমাণ করতে হবে যে, AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।

প্রমাণ : AB ও EF সরলরেখা দুটি G বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে।

∴ ∠AGH=বিপ্রতীপ ∠BGE.

কিন্তু ∠AGH=∠DHG (কল্পনানুসারে),

∴ ∠BGE=∠DHG,

কিন্তু এরা অনুরূপ কোণ।

∴ AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল। [স্বীকৃত সিদ্ধান্ত অনুসারে]

(ii) ধরা যাক, EF সরলরেখার একই পাশে অবস্থিত অন্তঃকোণ দুটি ∠DHG+∠HGB=2 সমকোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।

প্রমাণ : যেহেতু EF সরলরেখার উপর GB রেখাংশ দণ্ডায়মান,

∴ ∠HGB+∠BGE=2 সমকোণ।

∴ $\angle HGB + \angle BGE = \angle DHG + \angle HGB$.

∴ $\angle BGE = \angle DHG$.

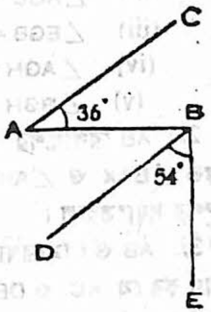
কিন্তু এরা অনুরূপ কোণ।

∴ AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল [স্বীকৃত সিদ্ধান্ত অনুসারে]।

অনুসিদ্ধান্ত 1. একই সরলরেখার উপর অঙ্কিত দুটি লম্ব পরস্পর সমান্তরাল।

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. 72 নং চিত্রে BE, AB-এর উপর লম্ব হলে, প্রমাণ কর যে AC ∥ DB.



72 নং চিত্র

প্রমাণ : $\angle ABD + \angle DBE = 90°$ [∵ $BE \perp AB$],

কিন্তু $\angle DBE = 54°$.

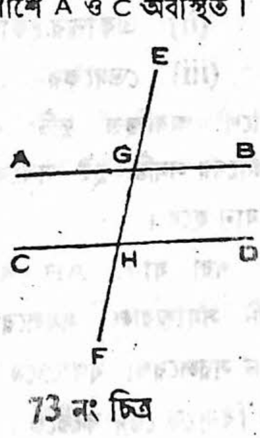
∴ $\angle ABD = 90° - 54° = 36°$.

∴ $\angle ABD = \angle BAC$, কারণ প্রত্যেকের মান 36°

কিন্তু এরা একান্তর কোণ।

∴ AC ∥ DB.

2. AB ও CD দুটি সরলরেখাকে EF সরলরেখা যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। EF-এর একই পাশে A ও C অবস্থিত। ∠AGH ও ∠FHD পরস্পর সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।



73 নং চিত্র

প্রমাণ : CD ও EF সরলরেখা দুটি পরস্পরকে H বিন্দুতে ছেদ করেছে।

∴ ∠FHD = বিপ্রতীপ ∠GHC.

কিন্তু ∠AGH ও ∠FHD পরস্পর সম্পূরক [কল্পনানুসারে],

∴ $\angle AGH + \angle FHD = 180°$

∴ $\angle AGH + \angle GHC = 180°$

অর্থাৎ EF ছেদকের একই পাশের দুটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ। ∴ AB ∥ CD.

অনুশীলনী 7

1. AB ও CD সরলরেখা দুটিকে EF সরলরেখা যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। নিম্নলিখিত যেকোন একটি শর্ত সাপেক্ষে AB ও CD সরলরেখা দুটির মধ্যে সম্পর্ক কি? প্রতি ক্ষেত্রে যুক্তি দাও।

(i) $\angle AGE = 130^\circ$, $\angle GHD = 50^\circ$

(ii) $\angle AGE = \angle DHF$.

(iii) $\angle EGB = 35^\circ$, $\angle CHF = 45^\circ$.

(iv) $\angle AGH = 55^\circ$, $\angle DHF = 150^\circ$.

(v) $\angle BGH$ ও $\angle CHF$ পরস্পর সম্পূরক।

2. AB রেখাংশের A ও B দুটি প্রান্তবিন্দুতে AB-এর বিপরীত পাশে অঙ্কিত $\angle BAX$ ও $\angle ABY$ সমান। প্রমাণ কর যে কোণ দুটির অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

3. AB ও CD রেখাংশ দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ কর যে AC ও DB পরস্পর সমান্তরাল। ACBD চতুর্ভুজটি কি ধরনের চতুর্ভুজ?

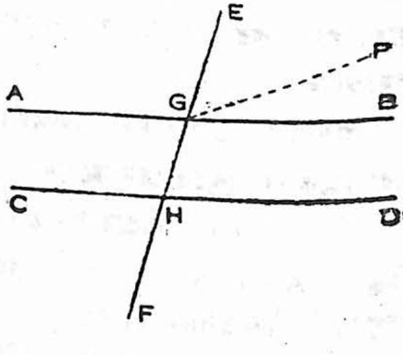
উপপাদ্য 5

একটি সরলরেখা দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করলে

(i) অনুরূপ কোণ দুটি সমান হবে,

(ii) একান্তর কোণ দুটি সমান হবে,

(iii) ছেদকের একই পাশে অবস্থিত দুটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হবে।



74 নং চিত্র

ধরা যাক, AB ও CD দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে EF সরলরেখা যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে

(i) $\angle BGE =$ অনুরূপ $\angle DHG$,

$=\{(m+n)-(n+p)\}\{(m+n)^2+(m+n)(n+p)$
$+(n+p)^2\}$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ $[m+n=a,\ n+p=b$ ধরে$]$

$=a^3-b^3$

$=(m+n)^3-(n+p)^3$ [a, bএর মান বসিয়ে]

$=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3-n^3-3n^2p-3np^2-p^3$

$=m^3+3m^2n+3mn^2-3n^2p-3np^2-p^3$

প্রশ্নমালা 15

সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(x-3)(x^2+3x+9)$
2. $(1-4x)(1+4x+16x^2)$
3. $(3a-5b)(9a^2+15ab+25b^2)$
4. $(ab-cd)(a^2b^2+abcd+c^2d^2)$
5. $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
6. $(a^2-2bc)(a^4+2a^2bc+4b^2c^2)$
7. $(2x-3y)(2x+3y)(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$
8. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a^3+8b^3)$

সরল কর :

9. $(x-y)(x^2+xy+y^2)+(y-z)(y^2+yz+z^2)$
$+(z-x)(z^2+zx+x^2)$
10. $(2a+3)(4a^2-6a+9)-(2a-3)(4a^2+6a+9)$
11. $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
12. $(x+1)(x^2-x+1)+(2x-1)(4x^2+2x+1)$
$-(x-1)(x^2+x+1)$

প্রমাণ : $\because$ AB ∥ EF, PQ ভেদক,

$\therefore$ ∠PRS = ∠PTF

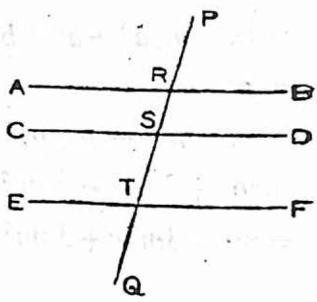
আবার, $\because$ CD ∥ EF, PQ ভেদক,

$\therefore$ ∠PSD = ∠PTF,

$\therefore$ ∠PRB = ∠PSD ;

কিন্তু এরা অনুরূপ কোণ,

$\therefore$ AB ∥ CD.



75 নং চিত্র

বিকল্প প্রমাণ :

AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল না হলে, তারা পরস্পরকে ছেদ করবে।

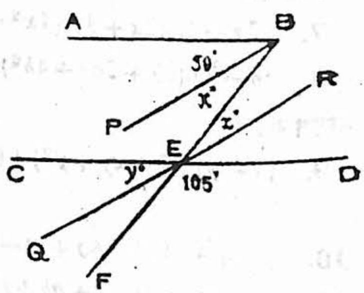
অর্থাৎ দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখার প্রত্যেকেই EF সরলরেখার সমান্তরাল, যা অসম্ভব।

সুতরাং AB ও CD পরস্পরকে ছেদ করতে পারে না,

অর্থাৎ AB ∥ CD.

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. 76 নং চিত্রে AB ∥ CD, PB ∥ QR ; ∠ABP = 30°, ∠FED = 105° ; x, y ও z-এর মান নির্ণয় কর।



76 নং চিত্র

উত্তর : $\because$ AB ∥ CD, BF ভেদক,

$\therefore$ ∠ABE + ∠BEC = 180°

কিন্তু ∠BEC = বিপ্রতীপ ∠FED = 105°,

$\therefore \quad 30° + x° + 105° = 180°,$

বা, $x° + 135° = 180°,$

$\therefore \quad x° = 180° - 135° = 45°$

$\therefore \quad x = 45.$

আবার PB ∥ QR এবং BF ছেদক,

$\angle PEB$ = একান্তর $\angle PBE$.

$\therefore \quad z^\circ = x^\circ = 45^\circ. \qquad \therefore \; z = 45.$

আবার, AB ∥ CE, BF ছেদক,

$\therefore$ $\angle CEB$ = অনুরূপ $\angle ABE = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

আবার, $\angle QEF$ = বিপ্রতীপ $\angle REB = 45^\circ$.

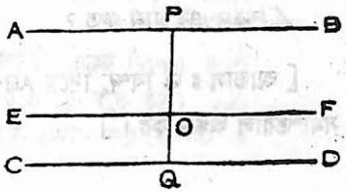
$\therefore \quad y^\circ + 45^\circ = 75^\circ.$

$\therefore \quad y^\circ = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ.$

$\therefore \quad y = 30.$

$\therefore$ x, y ও z-এর মান যথাক্রমে 45, 30, 45.

2. AB ও CD দুটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে O একটি বিন্দু। OP ও OQ যথাক্রমে AB ও CD-এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে P, O, Q বিন্দু তিনটি সমরেখ। '



77 নং চিত্র

[বিচার : ∵ AB ∥ CD এবং $\angle OPB$ ও $\angle OQD$ প্রত্যেকে সমকোণ :

∴ O বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরাল টানলে তা CD-এরও সমান্তরাল হবে। ফলে Q বিন্দুতে দুটি সন্নিহিত কোণ সৃষ্টি হবে যারা প্রত্যেকে 90°]

অঙ্কন : O বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরাল করে EF সরলরেখা টানা হলো।

প্রমাণ : CD ও EF উভয়েই AB-এর সমান্তরাল,

∴ EF এবং CD ও পরস্পর সমান্তরাল।

এবার AB ∥ EF এবং PO ছেদক,

$\therefore$ $\angle FOP$ = একান্তর $\angle OPA = 90^\circ$.

কিন্তু $\angle OPA = 90^\circ$ (∵ OP ⊥ AB)।

আবার, EF ∥ CD এবং OQ ছেদক,

$\therefore$ $\angle QOF$ = একান্তর $\angle OQC = 90^\circ$.

কিন্তু OQ ⊥ CD.

$\therefore \quad \angle QOF + \angle FOP = 180°$

$\therefore$ P, O, Q বিন্দু তিনটি সমরেখ।

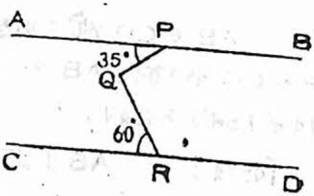
[মন্তব্য : O বিন্দু দিয়ে EF-এর সমান্তরাল না টেনে O বিন্দুতে PO ও QO-এর লম্ব টেনেও প্রমাণ করা যায়। চেষ্টা করে দেখ।]

অনুশীলনী 8

1. AB ও CD দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে EF সরলরেখা যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle EGB = 50°$ হলে, অন্য কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

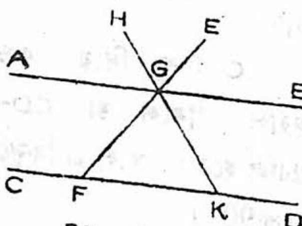
2. 78 নং চিত্রে AB ∥ CD ;
$\angle APQ = 35$, $\angle CRQ = 60$
$\angle PQR$-এর মান কত ?

[আভাস : Q বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর।]



78 নং চিত্র

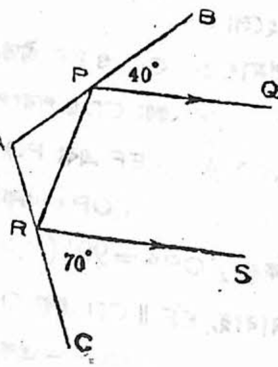
3. 79 নং চিত্রে AB ∥ CD. যে যে কোণগুলির মান সমান তাদের নামগুলি একসঙ্গে একটি বন্ধনীর মধ্যে লেখ।



79 নং চিত্র

4 80 নং চিত্রে PQ ∥ RS.
$\angle BPQ = 40°$, $\angle BPR = 155°$,
$\angle CRS = 70$ হলে,
ΔAPR-এর কোন্ কোণটির মান কত ?

[আভাস : A বিন্দু দিয়ে PQ-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর।]



80 নং চিত্র

5. ABC ত্রিভুজের BA ও CA বাহুকে যথাক্রমে E ও D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হলো যে, DE ∥ BC হয়। প্রমাণ কর যে, △ABC ও △ADE সদৃশকোণী। [দুটি ত্রিভুজের একটির তিনটি কোণ অপরটির তিনটি কোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুটিকে সদৃশকোণী বলা হয়।]

6. AB ও CD দুটি সমান্তরাল সরলরেখা। প্রমাণ কর যে, PQ সরলরেখা AB-এর উপর লম্ব হলে, CD-এর উপরও লম্ব হবে।

7. AB ও CD দুটি সমান্তরাল সরলরেখার উপর যথাক্রমে E ও F দুটি বিন্দু। EF রেখাংশের মধ্যবিন্দু O. প্রমাণ কর যে, O বিন্দুগামী ও সমান্তরাল সরলরেখা দুটি পর্যন্ত বিস্তৃত যেকোন রেখাংশ O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

8. PQ ও RS দুটি সমান্তরাল সরলরেখা। AB রেখাংশের প্রান্তবিন্দু A ও B যথাক্রমে PQ ও RS-এর উপর অবস্থিত। AB-এর মধ্যবিন্দু X দিয়ে অঙ্কিত অন্য যেকোন একটি রেখাংশ CD-এর দুটি প্রান্তবিন্দু C ও D যথাক্রমে PQ ও RS-এর উপর অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, AC = BD.

9. দুটি কোণের প্রান্তজোড়া বাহু সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, কোণ দুটি পরস্পর সমান অথবা সম্পূরক।

10. AB ও CD দুটি সমান ও সমান্তরাল রেখাংশ। একই দিকের দুটি প্রান্তবিন্দু A, C এবং অপরদিকের প্রান্তবিন্দু দুটি B, D যুক্ত কর। AD যুক্ত করে প্রমাণ কর যে △ABC ≅ △ACD, তা থেকে প্রমাণ কর যে, AC ও BD সমান ও সমান্তরাল।

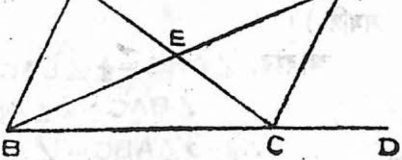
উপপাদ্য 6

একটি ত্রিভুজের কোন একটি বাহু বর্ধিত করিলে যে বহিঃস্থ কোণটি উৎপন্ন হয়, তার মান অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির মানের সমষ্টির সমান হবে।

ধরা যাক, △ABC-এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে,

বহিঃস্থ কোণ ∠ACD = অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ ∠CAB + অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ ∠ABC



81 নং চিত্র

অঙ্কন : মনে করি, AC-এর মধ্যবিন্দু E ; BE যুক্ত করে F পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হ'ল, যে BE=EF হয়। F,C যুক্ত করা হ'ল

প্রমাণ : △ABE ও △CEF-এর

AE=EC (স্বীকার),

BE=EF (অঙ্কনানুসারে),

∠AEB=বিপ্রতীপ ∠CEF,

∴ △AEB≅△CEF.

∴ ∠EAB=∠ECF,

কিন্তু এরা একান্তর কোণ,

∴ BA ∥ CF.

∴ ∠ABC=অনুরূপ ∠FCD.

∴ ∠EAB+∠ABC=∠ECF+∠FCD.

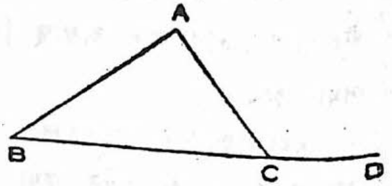
অর্থাৎ, ∠CAB+∠ABC=∠ACD,

অর্থাৎ, ∠ACD=∠CAB+∠ABC.

অনুসিদ্ধান্ত : কোন ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তার মান যেকোন অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের মান অপেক্ষা বেশী।

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. 82 নং চিত্রে ∠ACD=114° এবং ∠B=$\frac{1}{2}$ ∠A হলে, △ABC-এর কোন্ কোণটির মান কত ?



82 নং চিত্র

উত্তর : △ABC-এর বহিঃস্থ ∠ACD= ∠ABC+ ∠BAC (অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির সমষ্টি)।

আবার, ∠ABC=$\frac{1}{2}$∠BAC ;

∴ ∠BAC=2∠ABC.

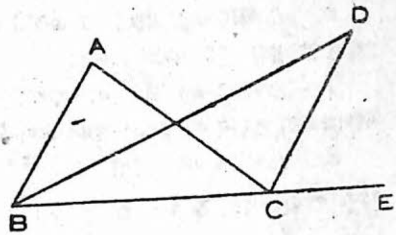
∴ 3∠ABC=∠ACD=114°.

∴ ∠ABC=38°.

∴ ∠BAC=2∠ABC=2×38°=76°.

∴ ∠ACB=180°−∠ACD=180°−114°=66°

2. ABC ত্রিভুজের ∠B-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও ∠C-এর বহির্দ্বিখণ্ডক D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle A$.



83 নং চিত্র

ABC ত্রিভুজের ∠B-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং ∠C-এর বহির্দ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ ∠ACE-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক CD, D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BAC$

প্রমাণ : △BDC-এর বহিঃকোণ $\angle DCE$

$= \angle CBD + \angle BDC$

আবার △ABC-এর বহিঃকোণ $\angle ACE = \angle CBA + \angle BAC$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\angle ACE = \frac{1}{2}\angle CBA + \frac{1}{2}\angle BAC$

$\therefore \quad \angle DCE = \angle CBD + \frac{1}{2}\angle BAC$

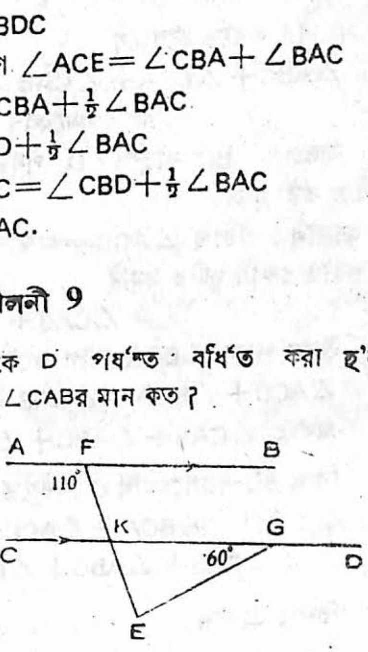
$\therefore \quad \angle CBD + \angle BDC = \angle CBD + \frac{1}{2}\angle BAC$

$\therefore \quad \angle BDC = \frac{1}{2}\angle BAC.$

অনুশীলনী 9

1. ABC ত্রিভুজের BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হ'ল। $\angle ACD = 130°$, $\angle ABC = 80°$ হলে ∠CABর মান কত ?

2. 84 নং চিত্রে AB ∥ CD. চিত্র থেকে ∠FEG-এর মান নির্ণয় কর।



84 নং চিত্র

3. △ABC-এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। $\angle ACD = 100°$ এবং $\angle ABC = \frac{2}{3}\angle CAB$. ত্রিভুজটির কোণগুলির প্রত্যেকটির মান নির্ণয় কর।

4. প্রমাণ কর যে, কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুগামী একটিমাত্র সরলরেখা ঐ সরলরেখাকে সমকোণে ছেদ করবে।

[একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখার উপর একটিই লম্ব অঙ্কন করা যায়।]

5. ABC ত্রিভুজের ∠ABC=∠CAB ; BCকে D পর্যন্ত বর্ধিত করে প্রমাণ কর যে ∠ACD=2∠ABC.

6. △ABC-এর মধ্যে O একটি বিন্দু। BO-কে ACপর্যন্ত বর্ধিত করে প্রমাণ কর যে, ∠BOC>∠BAC.

7. △ABC-এর BC বাহুকে উভয়দিকে বর্ধিত করলে যে দুটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়, প্রমাণ কর যে, তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

8. △PQR-এর মধ্যে S একটি বিন্দু। PSকে বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করে প্রমাণ কর যে, ∠QSR>∠QPR.

উপপাদ্য 7

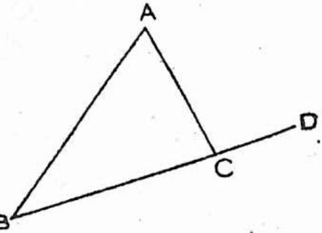
একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

ধরা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে

∠ABC+∠BCA+∠CAB

=2 সমকোণ।



85 নং চিত্র

অঙ্কন : BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হ'ল।

প্রমাণ : বহিঃস্থ ∠ACD=অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির সমষ্টি

=∠CAB+∠ABC

উভয় পক্ষে ∠BCA যোগ করে পাই

∠ACD+∠BCA=∠CAB+∠ABC+∠BCA

অর্থাৎ, ∠CAB+∠ABC+∠BCA=∠BCA+∠ACD,

কিন্তু BD সরলরেখার C বিন্দুতে CA রেখাংশটি দণ্ডায়মান

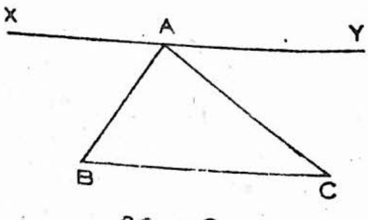
∴ ∠BCA+∠ACD=2 সমকোণ

∴ ∠CAB+∠ABC+∠BCA=2 সমকোণ

বিকল্প প্রমাণ :

ধরা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে ∠CBA+∠ACB+∠BAC= দুই সমকোণ।



36 নং চিত্র

অঙ্কন : A বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল করে XY টানা হ'ল।

প্রমাণ : EC ∥ XY এবং AB ভেদক

∴ ∠CBA = একান্তর ∠XAB

আবার, ∵ BC ∥ XY এবং AC ভেদক

∴ ∠ACB = একান্তর ∠CAY

∴ ∠CBA + ∠ACB = ∠XAB + ∠CAY

উভয় পক্ষে ∠BAC যোগ করলে

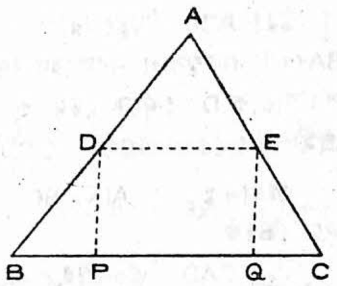
∠CBA + ∠ACB + ∠BAC = ∠XAB + ∠CAY + ∠BAC

= ∠XAB + ∠BAC + ∠CAY

= 2 সমকোণ

[**মন্তব্য** : (1) এক্ষেত্রেও আগের কারণেই এরূপ অঙ্কন করা হ'ল।

(2) 87 নং চিত্রে D ও E বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু এবং DP, EQ যথাক্রমে D ও E বিন্দু থেকে BC-এর উপর লম্ব। এবার চিত্রটি অঙ্কন করে কেটে নিয়ে DE, DP ও EQ বরাবর ভাঁজ করলে B, A, C বিন্দুগুলি BC সরলরেখার উপর একটি বিন্দুতে মিলিত হবে। এভাবে ধর্মটি যাচাই করে দেখতে পার।]



87 নং চিত্র

অনুসিদ্ধান্ত 1. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ অপর একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুটির তৃতীয় কোণ অবশ্যই সমান হবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ ছাড়া অপর দুটি কোণের সমষ্টি 1 সমকোণ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত 3. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ ছাড়া অপর দুটি কোণের প্রত্যেকটি সূক্ষ্মকোণ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত 4. স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণ ছাড়া অপর দুটি কোণের প্রত্যেকটি সূক্ষ্মকোণ হবে।

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. 88 নং চিত্র থেকে ∠BOC-এর মান ∠A দ্বারা প্রকাশ কর।

উত্তর : $\angle BOC + 2x^\circ = 180^\circ$

$2(x^\circ + y^\circ + z^\circ) = 180^\circ$

$\therefore \; x^\circ + y^\circ + z^\circ = 90^\circ$

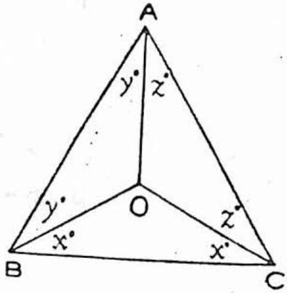
আবার, $y^\circ + z^\circ = \angle A$

$\therefore \; x^\circ = 90^\circ - (y^\circ + z^\circ)$

$= 90^\circ - \angle A$

$\therefore \; \angle BOC + 180^\circ - 2\angle A = 180^\circ$

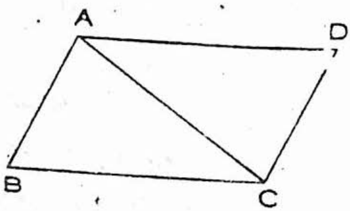
$\therefore \; \angle BOC = 2\angle A$



88 নং চিত্র

[**মন্তব্য :** AO-কে বর্ধিত করেও প্রমাণ করতে পার।]

2. ABC ত্রিভুজের A ও C বিন্দু দিয়ে যথাক্রমে অঙ্কিত BC ও BA-এর সমান্তরাল সরলরেখা দুটি পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, ∠ABC = ∠CDA.



89 নং চিত্র

প্রমাণ : ∵ AD ∥ BC এবং AC ভেদক

∴ ∠CAD = একান্তর ∠ACB.

আবার, ∵ BA ∥ CD

এবং AC ভেদক ∴ ∠ACD = একান্তর ∠BAC

∴ ∠ACB + ∠BAC = ∠CAD + ∠ACD

আবার △ADC-এর ∠CAD + ∠ACD + ∠CDA = 180°

এবং △ABC-এর ∠ACB + ∠BAC + ∠ABC = 180°

∴ ∠ACB + ∠BAC + ∠ABC = ∠CAD + ∠ACD + ∠CDA

∴ ∠ABC = ∠CDA

[**মন্তব্য :** △ABC ও △ACD সর্বসম প্রমাণ করেও প্রমাণ করতে পার।]

3. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি একই ক্রমে বর্ধিত করলে যে তিনটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি 360°. —প্রমাণ কর।

ধরা যাক, △ABC-এর AB, BC ও CA বাহুগুলিকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হ'ল।

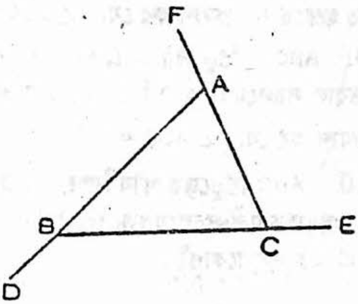
প্রমাণ করতে হবে যে, ∠DBC + ∠ECA + ∠FAB = 360°

প্রমাণ : বহিঃস্থ $\angle DBC = \angle BAC + \angle ACB$ (অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির সমষ্টি)। অনুরূপভাবে,

বহিঃস্থ $\angle ECA = \angle CBA + \angle BAC$

এবং বহিঃস্থ $\angle FAB = \angle BAC + \angle CBA$

$\therefore \angle DBC + \angle ECA + \angle FAB$
$= 2(\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB)$
$= 2 \times 180° = 360°$,



90 নং চিত্র

[$\because$ ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°]

অনুশীলনী 10

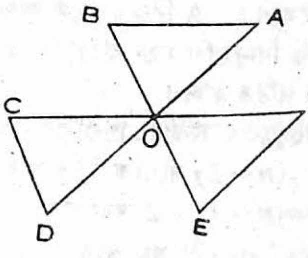
1. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের মান 51° ও 68°; তৃতীয় কোণটির মান কত ?

2. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির মান $x°$, $2x°$ ও $3x°$; ত্রিভুজের কোণগুলির প্রত্যেকটির মান নির্ণয় কর।

3. একটি সমকোণী ত্রিভুজের দুটি সূক্ষ্মকোণের একটি আর একটির দ্বিগুণ; ত্রিভুজের তিনটি কোণের প্রত্যেকটির মান নির্ণয় কর।

4. AEC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BAC$ সমকোণ। AD, BC-এর উপর লম্ব। $\angle ABC = 35°$ হলে, $\angle BAD$, $\angle CAD$, $\angle BCA$, $\angle ADB$ ও $\angle ADC$-এর মান পৃথকভাবে নির্ণয় কর।

5. 91 নং চিত্র থেকে $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ ও $\angle F$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর।



91 নং চিত্র

6. AB রেখাংশের A ও B প্রান্তবিন্দু দিয়ে AB-এর একই দিকে AC ও BD সমান্তরাল টানা হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $\angle CAB$ ও $\angle ABC$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

7. ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$.

8. ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$.

9. ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক A বিন্দুগামী BC-এর সমান্তরাল সরলরেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ কর যে, $\angle ADB = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$.

10. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C দিয়ে অঙ্কিত যথাক্রমে BC, CA ও AB-এর সমান্তরাল সরলরেখাগুলি মিলিত হয়ে যে ত্রিভুজ গঠন করে তা $\triangle ABC$-এর সদৃশকোণী।

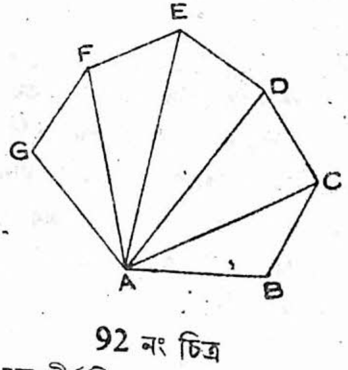
উপপাদ্য 8

n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $2(n-2)$ সমকোণের সমান।

ধরা যাক, ABCDEFG একটি n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে, এই বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $=2(n-2)$ সমকোণ।

অঙ্কন : AC, AD, AE, AF, যুক্ত করা হ'ল।



92 নং চিত্র

প্রমাণ : A বিন্দুর সঙ্গে অন্য কৌণিক বিন্দুগুলি যুক্ত করার ফলে Aকে শীর্ষবিন্দু করে $(n-2)$ সংখ্যক ত্রিভুজ গঠিত হ'ল।

বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি
$=(n-2)$ সংখ্যক ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি
$=(n-2)\times 2$ সমকোণ
$=2(n-2)$ সমকোণ

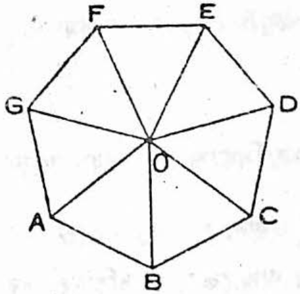
[**মন্তব্য:** আমরা জানি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ ; তাই আমরা কৌণিক বিন্দুগুলি যুক্ত করে বহুভুজটিকে কয়েকটি ত্রিভুজে ভাগ করে নিলাম]

বিকল্প প্রমাণ :

ধরা যাক, ABCDEFG একটি n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $=2(n-2)$ সমকোণ।

অঙ্কন : বহুভুজের অন্তঃস্থ যে কোন একটি বিন্দু O-এর সঙ্গে A, B, C, D, E, F, G কৌণিক বিন্দুগুলি যুক্ত করা হ'ল।



93 নং চিত্র

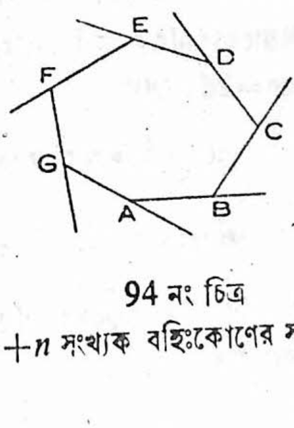
প্রমাণ : O বিন্দুর সঙ্গে A, B, C, D, E, F, G যুক্ত করার ফলে বহুভুজের যতগুলি বাহু, ততগুলি ত্রিভুজ গঠিত **হ'ল**, অর্থাৎ n সংখ্যক ত্রিভুজ গঠিত **হ'ল**। এই ত্রিভুজগুলির কোণের সমষ্টি $2n$ সমকোণ। এখন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি = ত্রিভুজগুলির কোণের সমষ্টি — O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলির সমষ্টি $=2n$ সমকোণ -4 সমকোণ।

[∵ কোন বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলির সমষ্টি 4 সমকোণ]

$=2(n-2)$ সমকোণ

অনুসিদ্ধান্ত 1. যেকোন চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি 4 সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত 2. n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট কোন বহুভুজের বাহুগুলি একই দিকে একই ক্রমে বর্ধিত করলে যে বহিঃকোণগুলি উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি 4 সমকোণ।



94 নং চিত্র

প্রতিটি বাহু একই দিকে একই ক্রমে বর্ধিত করার ফলে প্রতিটি অন্তঃকোণ ও তার সংলগ্ন বহিঃকোণের সমষ্টি 2 সমকোণ হবে।

∴ n সংখ্যক অন্তঃকোণের সমষ্টি $+n$ সংখ্যক বহিঃকোণের সমষ্টি

$=2n$ সমকোণ।

∴ n সংখ্যক বহিঃকোণের সমষ্টি

$=2n$ সমকোণ $-n$ সংখ্যক অন্তঃকোণের সমষ্টি

$=2n$ সমকোণ $-(2n-4)$ সমকোণ

$=4$ সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত 3. সুষম বহুভুজের যে কোন অন্তঃকোণ

$$=\frac{2n-4}{n}\times 90^\circ$$

অনুসিদ্ধান্ত 4. সুষম বহুভুজের যে কোন বহিঃকোণ $=\frac{360^\circ}{n}$

[**মন্তব্য :** অনুসিদ্ধান্ত 3 ও অনুসিদ্ধান্ত 4 থেকে কোন সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ বা বহিঃকোণের মান জানা থাকলে ঐ বহুভুজের বাহু সংখ্যা নির্ণয় করা যায়।]

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. নয়টি বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের অন্তকোণগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

আমরা জানি n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $=2(n-2)$ সমকোণ।

$\therefore$ নয়টি বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $=2(9-2)$ সমকোণ $=2\times 7$ সমকোণ $=14$ সমকোণ।

2. যে সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যা 15, তার প্রত্যেকটি অন্তঃকোণ ও প্রত্যেকটি বহিঃকোণের পরিমাণ কত ?

অন্তঃকোণগুলির মোট পরিমাণ $=2(15-2)$ সমকোণ $=2\times 13$ সমকোণ $=26\times 90^\circ$

$\therefore$ প্রত্যেকটি অন্তঃকোণের মান $=\frac{26\times 90^\circ}{15}=156^\circ$

প্রত্যেকটি বহিঃকোণের মান $=\frac{360^\circ}{15}=24^\circ$

3. যে সুষম বহুভুজের প্রতিটি বহিঃকোণের পরিমাণ 60°, তার বাহুসংখ্যা কত ?

$$\text{বাহুসংখ্যা}=\frac{360}{60}=6$$

4. যে সুষম বহুভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণের পরিমাণ $135°$, তার বাহুসংখ্যা কত ?

বহুভুজটির অন্তঃকোণের সমষ্টি $=2(n-2)\times 90°$, যদি বহুভুজটির বাহুসংখ্যা n হয়।

$\therefore\ 2(n-2)\times 90=135n$

বা, $180n-360=135n$

বা, $180n-135n=360$

বা, $45n=360$

বা, $n=\frac{360}{45}=8.$

বিকল্প পদ্ধতি :

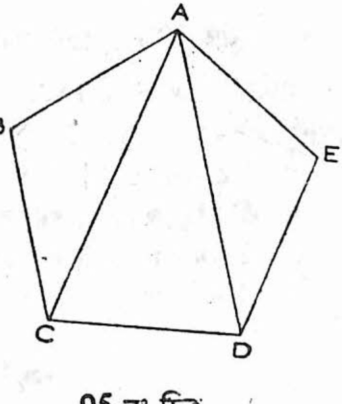
$\because$ প্রতিটি অন্তঃকোণের পরিমাণ $=135°$

$\therefore$ প্রতিটি বহিঃকোণের পরিমাণ $=180°-135°=45°$

$\therefore$ নির্ণেয় বাহুসংখ্যা $=\frac{360}{45}=8.$

5. ABCDE একটি সুষম পঞ্চভুজ। প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

ABCDE সুষম পঞ্চভুজের AC, AD যুক্ত করা হ'ল। প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle$ACD সমদ্বিবাহু।



95 নং চিত্র

প্রমাণ : $\because$ ABCDE সুষম পঞ্চভুজ।

$\therefore$ এর সব বাহু ও সব কোণ সমান।

$\therefore$ $\triangle$ABC ও $\triangle$ADE-এর

AB = AE

BC = DE

এবং অন্তর্ভূ‍ত $\angle$ABC = অন্তর্ভূ‍ত $\angle$AED

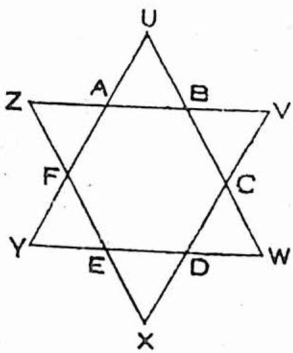
$\therefore\ \triangle ABC \cong \triangle AED$

$\therefore$ AC = AD

$\therefore$ $\triangle$ACD সমদ্বিবাহু।

6. একটি ষড়ভুজের প্রতিটি বাহু উভয়দিকে বর্ধিত করার ফলে তারা মিলিত হয়ে যে কোণগুলি উৎপন্ন করে, দেখাও যে তাদের সমষ্টি 4 সমকোণ।

ধরা যাক, ABCDEF একটি ষড়ভুজ। বাহুগুলিকে উভয়দিকে বর্ধিত করার ফলে তারা মিলিত হয়ে $\angle U$, $\angle V$, $\angle W$, $\angle X$, $\angle Y$, $\angle Z$ কোণগুলি উৎপন্ন করেছে।



96 নং চিত্র

দেখাতে হবে যে, $\angle U+\angle V+\angle W+\angle X+\angle Y+\angle Z$
= 4 সমকোণ

আমরা জানি যে কোন বহুভুজের বাহুগুলি একই দিকে একই ক্রমে বর্ধিত করলে যে বহিঃকোণগুলি উৎপন্ন হয়, তাদের সমষ্টি $360°$

$\therefore\quad \angle ZAF+\angle UBA+\angle VCB+\angle WDC+\angle XED$
$+\angle YFE=$ 4 সমকোণ

অনুরূপে, $\angle UAB+\angle VBC+\angle WCD+\angle XDE+\angle YEF$
$+\angle ZFA=$ 4 সমকোণ

$\therefore$ এই 12টি কোণের সমষ্টি = 8 সমকোণ

আবার, $\triangle AZF$, $\triangle FYE$, $\triangle EXD$, $\triangle DWC$, $\triangle CVB$, $\triangle BUA$এর কোণগুলির সমষ্টি $=6\times 2$ সমকোণ = 12 সমকোণ

$\therefore\quad \angle U+\angle V+\angle W+\angle X+\angle Y+\angle Z$
= 6টি ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি − 12টি কোণের সমষ্টি
= 12 সমকোণ − 8 সমকোণ
= 4 সমকোণ।

অনুশীলনী 11

1. নিম্নলিখিত বহুভুজগুলির অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর ঃ
(i) পঞ্চভুজ, (ii) ষড়ভুজ, (iii) সপ্তভুজ, (iv) অষ্টভুজ, (v) যে বহুভুজের বাহুসংখ্যা 10 (vi) যে বাহুভুজের বাহুসংখ্যা 12.

2. একটি চতুর্ভুজের তিনটি কোণের মান যথাক্রমে $104\cdot5°$, $65°$, $72\cdot5°$; চতুর্থ কোণের মান কত ?

3. একটি পঞ্চভুজের চারটি কোণের মান যথাক্রমে 65°, 89°, 132° ও 116° ; পঞ্চম কোণটির মান নির্ণয় কর।

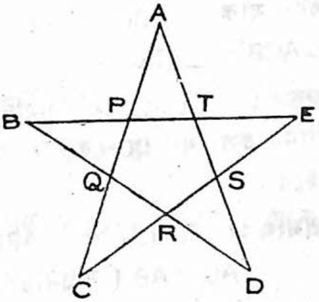
4. একটি চতুর্ভুজের দুটি কোণ সমান। অপর দুটি কোণের একটি এদের যে কোন একটির অর্ধেক এবং অপরটি দ্বিগুণ ; কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

5. একটি কুব্জ চতুর্ভুজের তিনটি কোণের মান 68°, 70° ও 35° হতে পারে কি ?

[কুব্জ বহুভুজের প্রত্যেকটি অন্তঃকোণ দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট হয়।]

6. একটি কুব্জ ষড়ভুজের পাঁচটি কোণের মান 120°, 170°, 95°, 178°, 160° হতে পারে কি ?

7. 97 নং চিত্রে ∠A, ∠B, ∠C, ∠D ও ∠E-এর সমষ্টি নির্ণয় কর।



97 নং চিত্র

8. নিম্নলিখিত সুষম বহুভুজগুলির প্রত্যেকটি অন্তঃকোণ ও প্রত্যেকটি বহিঃকোণের মান নির্ণয় কর ঃ

(i) পঞ্চভুজ, (ii) ষড়ভুজ, (iii) অষ্টভুজ, (iv) যার বাহুসংখ্যা 9, (v) যার বাহুসংখ্যা 10, (vi) যার বাহুসংখ্যা 12, (vii) যার বাহুসংখ্যা 18, (viii) যার বাহুসংখ্যা 20.

9. কোন সুষম বহুভুজের একটি বহিঃকোণের মাপ নিম্নলিখিত মানের হতে পারে কি ?

(i) 6° (ii) 10° (iii) 13° (iv) 18° (v) 24° (vi) 30° (vii) 35° (viii) 40° (ix) 42° (x) 45° (xi) 50° (xii) 70° (xiii) 72°

যে সব ক্ষেত্রে সম্ভব সে সব ক্ষেত্রে বহুভুজগুলির বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

10. কোন সুষম বহুভুজের একটি অন্তঃকোণের মাপ নিম্নলিখিত মানের হতে পারে কি ?

(i) 80° (ii) 100° (iii) 120° (iv) 144° (v) 155° (vi) 160° (vii) 165° (viii) 168° (ix) 170° (x) 171° (xi) 172° (xii) 175°

যে সব ক্ষেত্রে সম্ভব সে সব ক্ষেত্রে বহুভুজগুলির বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

11. PQRS চতুর্ভুজের ∠P ও ∠Q-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, ∠R ও ∠S-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ও পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

12. যে কোন চতুর্ভুজের দুটি সংলগ্ন কোণের অন্তঃদ্বিখণ্ডকদ্বয় যে কোণ উৎপন্ন করে, সেই কোণটি চতুর্ভুজের অপর কোণ দুটির সমষ্টির অর্ধেক— প্রমাণ কর।

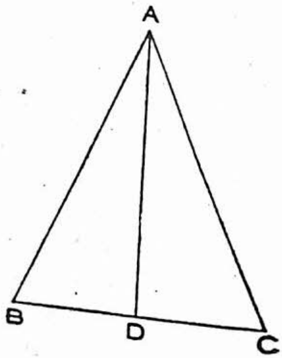
13. PQRS চতুর্ভুজের চারিটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলি O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। ∠POQ=75° হলে ∠ROSএর মান কত ?

উপপাদ্য 9

একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু সমান হলে, তাদের বিপরীত কোণ দুটি সমান হবে।

ধরা যাক, △ABC-এর AB বাহু=AC বাহু। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠ACB=∠ABC

অঙ্কন : ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক AD টানা হল যা BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে।



98 নং চিত্র

প্রমাণ : △ACD ও △ABD-এর
AC=AB (কল্পনানুসারে)
AD সাধারণ
অন্তর্ভূত ∠CAD=অন্তর্ভূত ∠BAD (অঙ্কনানুসারে)
∴ △ACD≅△ABD
∴ ∠ACD=∠ABD অর্থাৎ ∠ACB=∠ABC.

[**মন্তব্য :** এক্ষেত্রে দুটি কোণ সমান প্রমাণ করতে হবে। আমরা যে সব ধর্ম আগে পেয়েছি তা থেকে আমরা জানি (1) একটি সরলরেখার উপর অন্য একটি সরলরেখা লম্ব হলে দুটি কোণ সমান (সমকোণ) হয়, (2) সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ সমান হয়, (3) বিপ্রতীপ কোণ সমান হয় এবং (4) সমান্তরাল সরলরেখার ক্ষেত্রে অনুরূপ কোণ বা একান্তর কোণ সমান হয়। আমাদের যা দেওয়া আছে তাতে (1), (3) ও (4) আমরা বাতিল করতে পারি। তাই আমাদের এমন দুটি সর্বসম ত্রিভুজ পাওয়ার চেষ্টা করতে হবে যাতে যে দুটি কোণ সমান প্রমাণ করতে হবে তারা যেন ঐ দুটি ত্রিভুজের এক একটি কোণ হয়। সে রকম ত্রিভুজ না থাকাতে আমাদের এমন একটি অঙ্কন করতে হল যার ফলে আমরা দুটি সর্বসম ত্রিভুজ পেতে পারি। ঐ উদ্দেশ্যেই আমরা AD সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করলাম।

(2) তোমরা প্রতিফলনের ধর্মগুলি জেনেছ। ঐ ধর্মগুলি ব্যবহার করে AD সরলরেখায় প্রতিফলিত করেও উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়।]

অনুসিদ্ধান্ত 1. সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি কোণই সমান এবং প্রত্যেকটির মান 60°.

ABC সমবাহু ত্রিভুজে

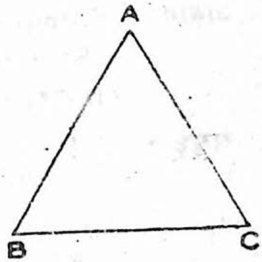
$\because$ AB=AC

$\therefore$ ∠ACB=∠ABC

আবার যেহেতু, CA=CB

$\therefore$ ∠ABC=∠CAB

$\therefore$ ∠ACB=∠ABC=∠CAB



99 নং চিত্র

আবার যেহেতু, তিনটি কোণের সমষ্টি 180°

$\therefore$ প্রতিটি কোণের মান $=\frac{180°}{3}=60°$

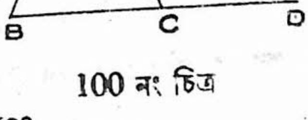
অনুসিদ্ধান্ত 2. সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি সূক্ষ্মকোণের মান 45°।

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. △ABC-এর AB=AC ; BC-কে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। ∠ACD=112° হলে, ত্রিভুজের কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

উত্তর : যেহেতু, BD সরলরেখার উপর AC দণ্ডায়মান

$\therefore$ ∠ACB+∠ACD =180°



100 নং চিত্র

$\therefore$ ∠ACB=180°−112°=68°

আবার যেহেতু, △ABC-এর AB=AC

$\therefore$ ∠ACB=∠ABC $\therefore$ ∠ABC=68°

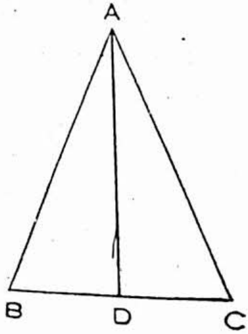
$\therefore$ ∠BAC=∠ACD−∠ABC=112°−68°=44°

প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ধরা যাক, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB=AC

শীর্ষকোণ BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক BC ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে (i) AD ⊥ BC এবং (ii) BD = DC.



101 নং চিত্র

প্রমাণ : △ABD ও △ACD-এর
AB = AC (কল্পনানুসারে)
AD সাধারণ
অন্তর্ভূত ∠BAD = অন্তর্ভূত ∠CAD
(কল্পনানুসারে)

∴ △ABD ≅ △ACD

∴ BD = CD

এবং ∠ADB = ∠ADC

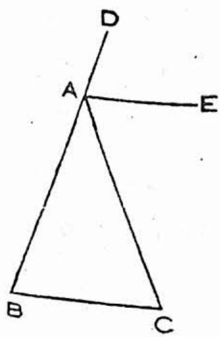
কিন্তু ∵ BC সরলরেখার উপর AD দণ্ডায়মান

∴ ∠ADB + ∠ADC = 180° ∴ এদের প্রত্যেকেই 90°

∴ AD ⊥ BC

3. প্রমাণ কর যে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক ভূমির সমান্তরাল।

ধরা যাক, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB = AC। BAকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হ'ল। AE, ∠BAC-এর বহির্দ্বিখণ্ডক।



102 নং চিত্র

প্রমাণ করতে হবে যে AE ∥ BC

প্রমাণ : △ABC-এর বহিঃকোণ ∠CAD
= ∠ABC + ∠ACB

আবার যেহেতু, △ABC-এর AB = AC

∴ ∠ACB = ∠ABC

∴ ∠CAD = 2 ∠ABC

∵ AE, ∠CAD-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক

∴ ∠CAD = 2 ∠DAE

∴ ∠DAE = ∠ABC

কিন্তু এরা অনুরূপ কোণ

∴ AE ∥ BC.

অনুশীলনী 12

1. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের মান 80° ভূমিসংলগ্ন কোণগুলির প্রত্যেকটির মান কত ?

2. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের যে কোন একটি ভূমিসংলগ্ন কোণের মান 70° ; শীর্ষকোণের মান কত ?

3. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুটির সমষ্টি 100°, ত্রিভুজটির কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

4. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণ ও একটি ভূমিসংলগ্ন কোণের সমষ্টি 150°, ত্রিভুজটির কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

5. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুটির যে কোন একটি (i) শীর্ষকোণের দ্বিগুণ, (ii) শীর্ষকোণের অর্ধেক, (iii) শীর্ষকোণের চার গুণ, (iv) শীর্ষকোণের এক-চতুর্থাংশ। প্রতিক্ষেত্রে ত্রিভুজের কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

6. একটি স্থূলকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের স্থূলকোণের মান 110° ; অপর কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

7. একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণের মান 25° ; স্থূল-কোণটির মান কত ?

8. একটি স্থূলকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ স্থূলকোণের এক তৃতীয়াংশ। কোণগুলির কোনটির মান কত ?

9. △ABC-এর AB = AC ; BA-কে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। ∠CAE = 150° হলে ত্রিভুজের কোণগুলির মান নির্ণয় কর।

10. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিকে উভয়দিকে বর্ধিত করলে যে দুটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়—প্রমাণ কর যে তারা সমান।

11. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুগুলি বর্ধিত করায় ভূমির সঙ্গে যে দুটি কোণ উৎপন্ন করে, প্রমাণ কর যে তারা সমান।

12. প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্ব শীর্ষকোণ ও ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

13 প্রমাণ কর যে, একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের
(i) সমান সমান বাহু দুটির বিপরীত শীর্ষবিন্দুগুলি থেকে অঙ্কিত মধ্যমাগুলি সমান,
(ii) ভূমি সংলগ্ন কোণ দুটির শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্ব দুটির দৈর্ঘ্য সমান।

14 △ABC-এর AB = AC ; ∠ABC ও ∠ACB-এর সমদ্বিখণ্ডক দুটি যথাক্রমে AC ও ABকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BD = CE.

15. PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ। PQ ও PR বাহুর উপর ত্রিভুজটির বাইরের দিকে APQ ও BPR সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে,

(i) AP ও BP একই সরলরেখায় অবস্থিত, (ii) ABRQ একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম (iii) AR=BQ.

16. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। এই ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর XAB, YBC এবং ZCA সমবাহু ত্রিভুজগুলি অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে, XYZ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

17 ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB=AC ; ত্রিভুজটির কোন্ কোণটি সমকোণ বলতো ? AB ও AC বাহুর উপর PAB, QAC দুটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে PC=BQ।

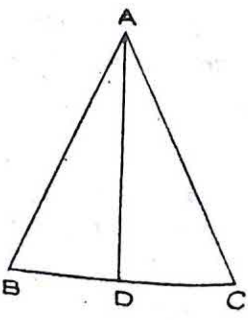
উপপাদ্য 10

একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ সমান হলে, তাদের বিপরীত বাহু দুটিও সমান হবে।

ধরাযাক, △ABC-এর ∠ABC=∠ACB.

প্রমাণ করতে হবে যে, AC=AB

অঙ্কন : ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক AD অঙ্কন করা হল, AD, BCকে D বিন্দুতে ছেদ করে।



103 নং চিত্র

প্রমাণ : △ABD ও △ACD-এর

∠ABD=∠ACD (কল্পনানুসারে)

∠BAC=∠CAD (অঙ্কনানুসারে)

AD সাধারণ বাহু

∴ △ABD≅△ACD ∴ AB=AC

অর্থাৎ AC=AB.

[**মন্তব্য :** (1) AD কেন অঙ্কন করা হ'ল তা বুঝে নাও। AD অঙ্কন করার ফলে আমরা দুটি সর্বসম ত্রিভুজ পেলাম।

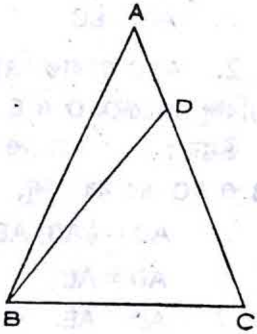
আচ্ছা বলতো AD, ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক না হয়ে BC-এর উপর লম্ব হলে উপপাদ্যটি কি প্রমাণ করা যায় ? যুক্তি সহ বল।

আবার AD যদি এমন একটি রেখাংশ হয় যে D, BC-এর মধ্যবিন্দু, তাহলে প্রমাণ করা যাবে কি না ?

(2) এক্ষেত্রেও AD রেখায় প্রতিফলিত করে প্রমাণ করার চেষ্টা করতে পার।]

বিকল্প প্রমাণ ঃ ধরা যাক △ABC-এর ∠ABC = ∠ACB

প্রমাণ করতে হবে যে, AC = AB



প্রমাণ ঃ AC = AB না হলে,

অর্থাৎ AC ও AB অসমান হলে AC ও AB-এর মধ্যে যে কোন একটি অপরটি থেকে বড় হবে। ধরা যাক, AC > AB। তাহলে CA থেকে BA-এর সমান করে CD অংশ কেটে নেওয়া হ'ল। BD যুক্ত করা হ'ল।

এবার △ABC ও △DBC-এর BA = CD, BC সাধারণ

104 নং চিত্র

এবং অন্তর্ভূর্ত ∠ABC = অন্তর্ভূর্ত ∠DCB

[∵ ∠ACB ও ∠DCB একই কোণ]

∴ △ABC ≅ △DBC ∴ ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল সমান।

কিন্তু △DBC, △ABC-এর অংশ

∴ এদের ক্ষেত্রফল সমান হতে পারে না।

তাহলে দেখা যাচ্ছে আমরা যা ধরে নিয়েছিলাম তা থেকে এমন একটি সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছি যা অসম্ভব।

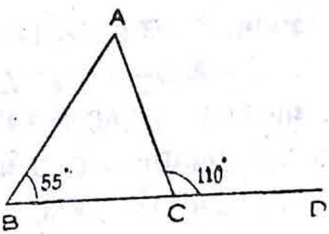
∴ AC ও AB অসমান নয়, ∴ AC = AB.

[**মন্তব্য** ঃ এটি উপপাদ্য 9-এর বিপরীত উপপাদ্য। সেজন্য এক্ষেত্রেও আমরা যে সিদ্ধান্তে পৌঁছুতে চাইছি তা হবে না ধরে নিয়ে এগুলাম এবং ফলে একটি ভুল সিদ্ধান্তে পৌঁছুলাম। তাই আমরা বলতে পারি যে সিদ্ধান্তে পৌঁছুতে চাইছি সেটাই ঠিক।]

অনুসিদ্ধান্ত ঃ একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ পরস্পর সমান হলে ত্রিভুজটি সর্বসম হবে।

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. 105নং চিত্রে প্রমাণ কর যে, AC = BC



105 নং চিত্র

প্রমাণ ঃ △ABC-এর BC-কে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে,

∴ বহিঃকোণ ∠ACD
= ∠ABC + ∠BAC

∴ $\angle BAC = \angle ACD - \angle ABC = 110^\circ - 55^\circ = 55^\circ$

∴ $\angle ABC = \angle BAC$

∴ $AC = BC$

2. ABC সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি বাহু 4 সেমি। AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। DE-এর দৈর্ঘ্য কত ?

উত্তর : ∵ D ও E যথাক্রমে AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু,

∴ $AD = \frac{1}{2}AB,\ AE = \frac{1}{2}AC$

∵ $AD = AC$

∴ $AD = AE$

∴ $\angle AED = \angle ADE$

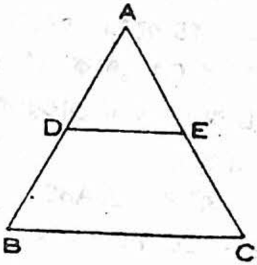
আবার △ABC সমবাহু বলে

$\angle DAE = 60^\circ$

∴ $\angle ADE + \angle AED = 120^\circ$

∴ $\angle ADE = \angle AED = 60^\circ$, ∴ △ADE সমবাহু

∴ $DE = AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 4$ সেমি $= 2$ সেমি

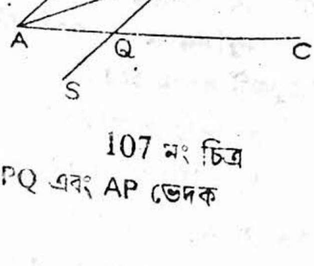


106 নং চিত্র

3. একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু থেকে কোণের কোন একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর বাহুকে ছেদ করার ফলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয়, প্রমাণ কর যে, তা সমদ্বিবাহু।

ধরা যাক, $\angle BAC$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক AD-এর উপর P একটি বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BA-এর সমান্তরাল সরলরেখা RS, AC-কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, △AQP সমদ্বিবাহু।



107 নং চিত্র

প্রমাণ : যেহেতু, BA ∥ RS অর্থাৎ PQ এবং AP ভেদক

∴ $\angle BAD =$ একান্তর $\angle APQ$

আবার AD, $\angle BAC$এর সমদ্বিখণ্ডক

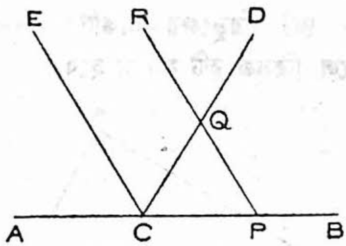
∴ $\angle BAD = \angle CAD$ অর্থাৎ $\angle PAQ$

∴ $\angle APQ = \angle PAQ$ ∴ $AQ = PQ$

∴ △APQ সমদ্বিবাহু।

অনুশীলনী 13

1. 108 নং চিত্রে CE, ∠ACD-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং CE ‖ PR. CP ও CQ-এর মধ্যে সম্পর্ক কি ? যুক্তি দাও।



108 নং চিত্র

2. ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠A সমকোণ। BC-এর উপর D এমন একটি বিন্দু নেওয়া হল যে BA = AD হয় ; প্রমাণ কর যে D, BC-এর মধ্যবিন্দু।

3. সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যোগ করলে যে চারটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, প্রমাণ কর যে তারা সর্বসম সমবাহু ত্রিভুজ।

4. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার ∠B সমকোণ। B বিন্দুতে ∠BAC-এর সমান করে ∠ABD অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে D, AC-এর মধ্যবিন্দু।

5. △ABC-এর ∠BAC = 90° এবং ∠BCA = 30° ; প্রমাণ কর যে, $AB = \frac{1}{2}BC$.

6. △ABC-এর AB বাহু = AC বাহু। BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা DE, AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, △ADE সমদ্বিবাহু। আরও প্রমাণ কর যে, DB = EC. এবার বলতো DBCE কি ধরনের চতুর্ভুজ ?

7. PQR ত্রিভুজের PQ = QR। QR-এর মধ্যবিন্দু D থেকে অঙ্কিত PQ-এর সমান্তরাল সরলরেখা PR-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $DE = \frac{1}{2}PQ$।

8. XYZ সমকোণী ত্রিভুজের XY বাহু = $\frac{1}{2}$ অতিভুজ XZ, প্রমাণ কর যে, ∠YXZ = 60°.

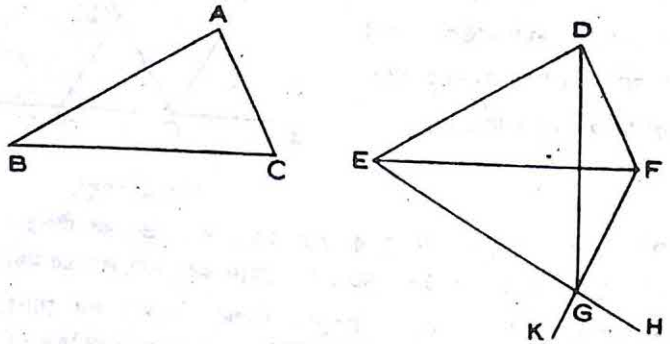
9. ABCD ট্রাপিজিয়মের AD ‖ BC এবং ∠ABC = ∠BCD ; প্রমাণ কর যে, ABCD সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম।

10. ABC ত্রিভুজের ∠BAC-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও AC এর মধ্যবিন্দু D দিয়ে অঙ্কিত AB এর সমান্তরাল সরলরেখা E বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, ∠AEC = 1 সমকোণ।

11. ABC ত্রিভুজের AB = AC এবং ∠B = 2∠A ; ∠B-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক AC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, △BCD সমদ্বিবাহু।

উপপাদ্য 11

দুটি ত্রিভুজের একটির তিনটি বাহু অপরটির তিনটি বাহুর সমান হলে, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।



109 নং চিত্র

ধরা যাক, △ABC ও △DEF এর AB=DE, BC=EF এবং CA=FD.

প্রমাণ করতে হবে যে, △ABC ≅ △DEF.

অঙ্কন : EF বাহুর যে পাশে ∠FED ও ∠EFD অবস্থিত তার বিপরীত পাশে E ও F বিন্দুতে ∠CBA ও ∠ACB-এর সমান করে যথাক্রমে ∠FEH ও ∠EFK অঙ্কন করা হ'ল। EH ও FK বাহুদ্বয় পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে। GD যুক্ত কর হ'ল।

প্রমাণ : △ABC ও △GEF-এর

∠ABC = ∠GEF (অঙ্কনানুসারে)
∠BCA = ∠EFG (অঙ্কনানুসারে)
BC = EF (কল্পনানুসারে)

∴ △ABC ≅ △GEF, ∴ AB = GE এবং CA = FG

কিন্তু AB = DE এবং CA = FD, ∴ GE = DE এবং FG = FD

আবার ∵ △DEG-এর GE = DE, ∴ ∠EGD = ∠EDG

এবং ∵ △DFG-এর FG = FD, ∴ ∠FGD = ∠FDG

∴ ∠EGD + ∠FGD = ∠EDG + ∠FDG

অর্থাৎ ∠EGF = ∠EDF

এখন △GEF ও △DEF-এর GE = DE GF = DF

এবং অন্তর্ভূত ∠EGF = অন্তর্ভূত ∠EDF ∴ △EGF ≅ △DEF

কিন্তু △ABC ≅ △EGF ∴ △ABC ≅ △DEF.

[মন্তব্য : (1) লক্ষ্য কর, △ABC-কে রূপান্তরিত করে △GEF পাওয়া গেল এবং পরে EF সরলরেখায় প্রতিফলিত করলেই △DEF পাওয়া যাবে।

(2) এবার আমরা ত্রিভুজের সর্বসমতার তিন দফা শর্ত পেলাম। জ্যামিতিক ধর্ম প্রতিষ্ঠার ক্ষেত্রে ত্রিভুজের সর্বসমতা ধর্মের প্রয়োগ অত্যন্ত বেশী বলেই এগুলি তোমরা ভালভাবে মনে রাখবে।

তিন দফা শর্ত হল :

(i) বাহু-কোণ-বাহু (SAS), অর্থাৎ দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হতে হলে দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ, অপরটির দুটি বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের সমান হতে হবে ;

অথবা, (ii) কোণ-কোণ-বাহু (AAS), অর্থাৎ দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হতে হলে, দুটি ত্রিভুজের একটির যে কোন দুটি কোণ ও একটি কোণের বিপরীত বাহু, অপরটির যে কোন দুটি কোণ ও অনুরূপ বাহু সমান হতে হবে। আমরা আগেই জেনেছি দুটি কোণ সমান হলে তৃতীয় কোণটিও সমান হয়। কাজেই এই শর্তটিকে আমরা কোণ-বাহু-কোণ (ASA)ও বলতে পারি, অর্থাৎ দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহু, অপরটির দুটি কোণ ও সংলগ্ন বাহু সমান হতে হবে ;

অথবা, (iii) বাহু-বাহু-বাহু (SSS), অর্থাৎ দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হতে হলে একটির তিনটি বাহু অপরটির তিনটি বাহুর সর্বসম হতে হবে।

লক্ষ কর, দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হওয়ার জন্য তিনটি উপাদান সমান হতে হবে ; কিন্তু যে কোন তিনটি উপাদান সমান হলেই দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হবে না। আমরা দুটি বিভিন্ন মাপের রেখাংশের উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করে সহজেই দেখাতে পারি; ত্রিভুজ দুটির তিনটি কোণ সমান হবে ; কিন্তু ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে কি ?

দুটি বাহু ও যেকোন একটির বিপরীত কোণ সমান হলেও ত্রিভুজ দুটি সর্বসম নাও হতে পারে। এটা তোমরা সপ্তম শ্রেণীর একটি অঙ্কনের ক্ষেত্রে নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ।

(3) দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে তাদের কোণগুলি ও বাহুগুলি সমান হয়, কিন্তু কোন্ কোণ কোন্ কোণের সমান ও কোন্ বাহু কোন্ বাহুর সমান হবে, তা খুব সতর্ক হয়ে ঠিক করতে হবে। মনে রাখতে হবে, অনুরূপ বাহু অর্থাৎ সমান সমান কোণের বিপরীত বাহু এবং অনুরূপ কোণ অর্থাৎ সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ সমান হবে।

(4) উপপাদ্য 11-এর সর্বসমতার শর্ত কিন্তু উপপাদ্য 9-এর প্রমাণের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হবে না, কারণ উপপাদ্য 11-এর প্রমাণ করার জন্য উপপাদ্য 9-এর ধর্ম প্রয়োগ করা হয়েছে। কাজেই লক্ষ কর, কেউ যদি উপপাদ্য 9-এর প্রমাণ নিম্নলিখিত উপায়ে করে তাহলে ভুল করবে ;

△ABC-এর AB=AC ; BC-এর মধ্যবিন্দু D-এর সঙ্গে A যোগ করা হল। এবার △ABD ও △ACD-এর মধ্যে

AB=AC

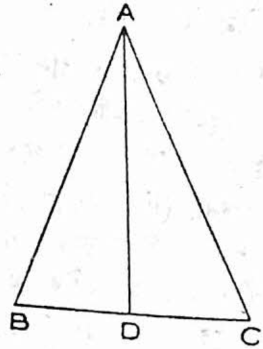
AD সাধারণ বাহু

BD=CD

∴ △ABD≅△ACD

∴ ∠ABD=∠ACD

অর্থাৎ ∠ABC=∠ACD]

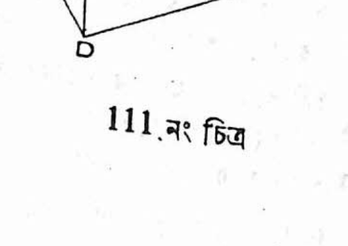


110 নং চিত্র

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. ABCD চতুর্ভুজের AB=AD এবং BC=DC। প্রমাণ কর যে, AC কর্ণ BD কর্ণকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অঙ্কন : AC ও BD, মনে করি, পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।



111 নং চিত্র

প্রমাণ : △ABC ও △ADC-এর AB=AD (কল্পনানুসারে)

BC=DC (কল্পনানুসারে)

AC সাধারণ

∴ △ABC≅△ADC

∴ ∠BAC=∠DAC

অর্থাৎ ∠BAO=∠DAO

আবার △ABO ও △ADO-এর

AB=AD (কল্পনানুসারে)

AO সাধারণ

অন্তর্ভূত ∠BAO=অন্তর্ভূত ∠DAO (প্রমাণিত)

∴ △BOA≅△DOA ∴ BO=DO

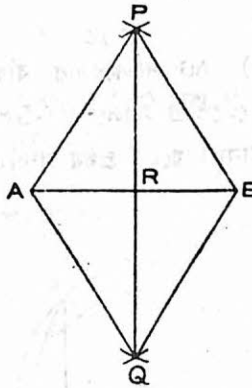
এবং ∠AOB = ∠AOD

কিন্তু BD সরলরেখার উপর OA সরলরেখা দণ্ডায়মান হয়ে এ দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়েছে।

∴ এদের প্রত্যেকেই সমকোণ ∴ BD ⊥ AC

∴ AC, BDকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

2. AB রেখাংশটিকে যেভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করা হয়েছে, তার চিত্র পাশে দেখান হল। ষষ্ঠ শ্রেণীর বই-এর অঙ্কন প্রণালী দেখে নাও এবং তা সিদ্ধ কিনা বিচার কর।



112 নং চিত্র

অঙ্কন : AP, AQ, BP, BQ যুক্ত করা হল।

প্রমাণ : △APQ ও △BPQ-এর
AP = BP (অঙ্কন প্রণালী অনুসারে)
AQ = BQ (অঙ্কন প্রণালী অনুসারে)
PQ সাধারণ

∴ △APQ = △BPQ

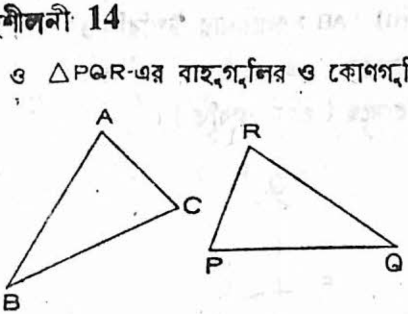
∴ ∠APR = ∠BPR

আবার, △APR ও △BPR-এর AP = BP, PR সাধারণ, অন্তর্ভূক্ত ∠APR = অন্তর্ভূক্ত ∠BPR

∴ △APR ≅ △BPR ∴ AR = BR.

অনুশীলনী 14

1. 113 নং চিত্রে △ABC ও △PQR-এর বাহুগুলির ও কোণগুলির মধ্যে কয়েকটি সম্পর্ক দেওয়া হল। প্রতিক্ষেত্রে আর কি শর্তে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে তা বিবৃত কর :



113 নং চিত্র

(i) AB = PQ
এবং AC = PR

(ii) AB = PQ
এবং ∠ABC = ∠PQR

(iii) ∠ABC = ∠PQR এবং ∠ACB = ∠PRQ.

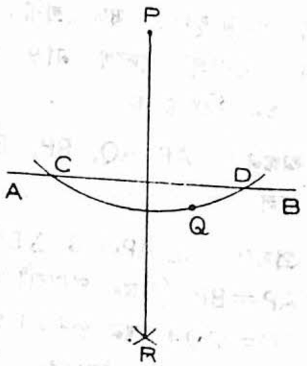
2. ABCD একটি রম্বস। প্রমাণ কর যে, AC কর্ণ ∠BAD ও ∠DCB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং AD, BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

3. ABC ত্রিভুজের BA ও CA থেকে যথাক্রমে BD ও CE দুটি সমান অংশ কেটে নেওয়া হল। BE = CD হলে, প্রমাণ কর যে △ABC সমদ্বিবাহু।

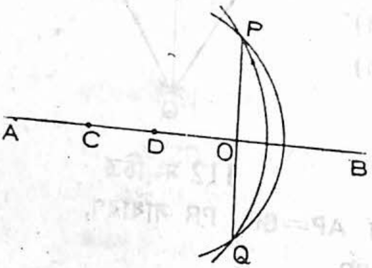
4. BC বাহুর একই পাশে △ABC ও △DBC অবস্থিত। BA = CD, BD = CA হলে, প্রমাণ কর যে, AD ∥ BC।

5. তোমরা ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণীতে কতকগুলি অঙ্কন করেছ। তোমাদের সুবিধার জন্য অঙ্কন চিহ্নসহ প্রতিটি অঙ্কনের চিত্র নিচে দেওয়া হল। প্রতিক্ষেত্রে অঙ্কন প্রণালী সিদ্ধ কিনা বিচার কর।

(i) AB সরলরেখার বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখার উপর PR লম্ব টানা হয়েছে (প্রথম পদ্ধতি)।



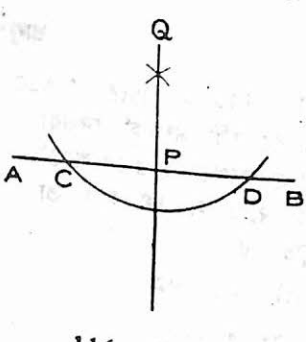
114 নং চিত্র



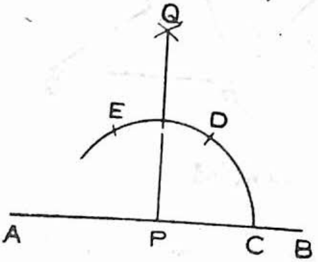
115 নং চিত্র

(ii) AB সরলরেখার বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখার উপর PQ লম্ব টানা হয়েছে (দ্বিতীয় পদ্ধতি)।

(iii) AB সরলরেখার উপরিস্থিত P বিন্দুতে AB-এর উপর PQ লম্ব টানা হয়েছে (প্রথম পদ্ধতি)।



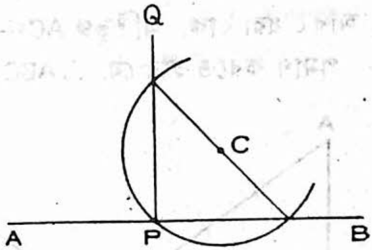
116 নং চিত্র



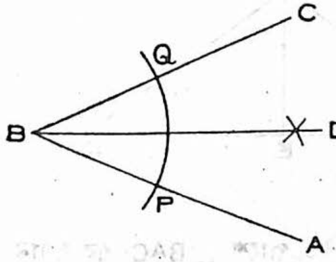
117 নং চিত্র

(iv) AB সরলরেখার উপরিস্থিত P বিন্দুতে AB-এর উপর PQ লম্ব টানা হয়েছে (দ্বিতীয় পদ্ধতি)।

(v) AB সরলরেখার উপরিস্থিত P বিন্দুতে AB-এর উপর PQ লম্ব টানা হয়েছে (তৃতীয় পদ্ধতি)।



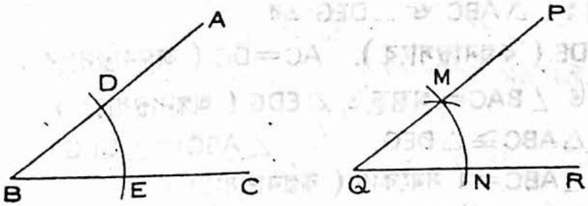
118 নং চিত্র



119 নং চিত্র

(vi) ∠ABC-কে BD দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা হয়েছে।

(vii) ∠ABC-এর সমান করে ∠PQR অঙ্কন করা হয়েছে।



120 নং চিত্র

6. △FQR-এর PQ = PR, ∠Q ও ∠R-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে. OP, ∠P-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

7. △ABC-এর AB = AC। BC বাহুর উপর D ও E এমন দুটি বিন্দু যে BD = CE হয়। প্রমাণ কর যে, AD = AE।

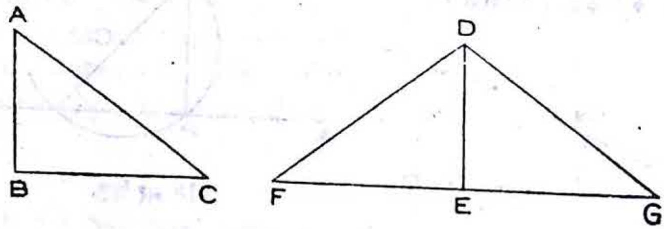
8. ∠BAC-এর AB বাহু থেকে AP, AQ এবং AC বাহু থেকে যথাক্রমে AR, AS অংশ এমন ভাবে কেটে নেওয়া হল যে AP = AR এবং AQ = AS হয়। PS ও QR পরস্পরকে T বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, (i) ∠APS = ∠ARQ, (ii) PT = RT এবং (iii) AT, ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক।

উপপাদ্য 12

দুটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির অতিভুজ ও একটি বাহু অপরটির অতিভুজ ও অনুরূপ বাহু সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।

ধরা যাক, সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর ∠ABC এবং সমকোণী ত্রিভুজ DEF-এর ∠DEF সমকোণ।

আরও ধরা যাক, অতিভুজ $AC =$ অতিভুজ DF এবং $AB = DE$
প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



121 নং চিত্র

অঙ্কন : E বিন্দুতে $\angle EDF$-এর বিপরীত পাশে $\angle BAC$-এর সমান করে $\angle EDG$ অঙ্কন করা হ'ল। AC-এর সমান করে DG কেটে নেওয়া হ'ল। EG যুক্ত করা হ'ল।

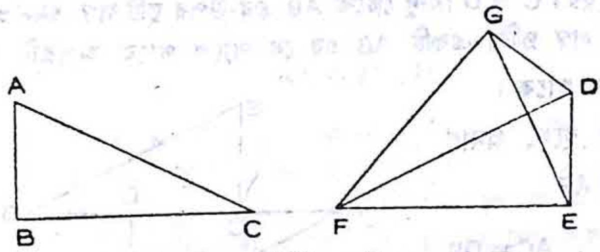
প্রমাণ : $\triangle ABC$ ও $\triangle DEG$-এর
$AB = DE$ (কল্পনানুসারে), $AC = DG$ (অঙ্কনানুসারে)
অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle EDG$ (অঙ্কনানুসারে)
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEG$, $\therefore \angle ABC = \angle DEG$
কিন্তু $\angle ABC = 1$ সমকোণ (কল্পনানুসারে)
$\therefore \angle DEG = 1$ সমকোণ
আবার $\angle DEF = 1$ সমকোণ (কল্পনানুসারে)
$\therefore \angle DEF$ ও $\angle DEG$ সন্নিহিত কোণ দুটির সমষ্টি দুই সমকোণ।
$\therefore$ EF ও EG এক সরলরেখায় অবস্থিত
$\therefore$ DFG একটি ত্রিভুজ যার $DF = DG$ ($\because AC = DF$)
$\therefore \angle DFE = \angle DGE = \angle ACB$ $\because \triangle ABC \cong \triangle DEG$
এবার $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$-এর
$\angle ABC = \angle DEF$ (উভয়েই সমকোণ)
$\angle ACB = \angle DFE$ (প্রমাণিত)
$AC = DF$ (কল্পনানুসারে)
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$

বিকল্প প্রমাণ :

ধরা যাক, সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $\angle ABC$ এবং $\triangle DEF$-এর $\angle DEF$ সমকোণ। আরও ধরা যাক, অতিভুজ $AC =$ অতিভুজ DF এবং $AB = DE$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

অঙ্কন ঃ △DFE বিপরীত পাশে △DGF এমনভাবে অঙ্কন করা হ'ল, যেন AB=DG এবং BC=GF হয়। GE যুক্ত করা হ'ল।



122 নং চিত্র

প্রমাণ ঃ DG=AB (অঙ্কনানুসারে)

কিন্তু AB=DE (কল্পনানুসারে)

∴ DG=DE, ∴ ∠DEG=∠DGE

আবার △ABC ও △DGF-এর

AB=DG (অঙ্কনানুসারে) BC=GF (অঙ্কনানুসারে)

AC=DF (কল্পনানুসারে)

∴ △ABC ≅ △DGF, ∴ ∠ABC=∠DGF

∴ ∠DEF=∠DGF

∴ ∠DEF−∠DEG=∠DGF−∠DGE

অর্থাৎ ∠FEG=∠FGE, ∴ FG=FE

আবার △DEF ও △DGF-এর DE=DG,

FE=FG, FD সাধারণ ∴ △DEF ≅ △DGF

কিন্তু পূর্বেই প্রমাণিত হয়েছে যে

△DGF ≅ △ABC, ∴ △DEF ≅ △ABC

[**মন্তব্য ঃ** (1) লক্ষ কর, △ABC-এর সর্বসম একটি ত্রিভুজ পাওয়ার জন্যই অঙ্কনগুলি করা হয়েছে।

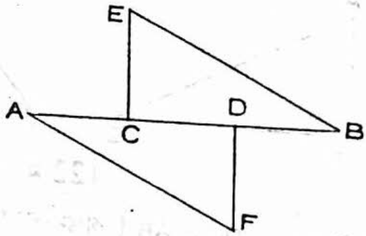
(2) প্রথম প্রমাণে সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু ধর্ম এবং দ্বিতীয় প্রমাণে বাহু-বাহু-বাহু ধর্ম ব্যবহার করা হয়েছে।

(3) সমকোণী ত্রিভুজের সর্বসমতার শর্তগুলি বিশেষভাবে লক্ষণীয়। এক্ষেত্রে দুটি বাহু এবং একটির (অতিভুজের) বিপরীত কোণ সমান হওয়ার ফলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হয়েছে। সাধারণ ত্রিভুজের ক্ষেত্রে এই শর্তে দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হবে না।]

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. AB রেখাংশের উপর C ও D দুটি বিন্দু এমনভাবে নেওয়া হল, যে AC=DB হয়। C ও D বিন্দু থেকে AB-এর উপর দুটি লম্ব এমনভাবে টানা হল যে লম্ব দুটির একটি AB-এর যে পাশে থাকে অপরটি তার বিপরীত পাশে থাকে।

BE=AF হলে, প্রমাণ কর যে, BE ∥ AF



123 নং চিত্র

প্রমাণ : ∵ AC=DB

∴ AC+CD=DB+CD

অর্থাৎ AD=BC

আবার হেহেতু CE ⊥ AB এবং DF ⊥ AB

∴ △ADF ও △BCE উভয়েই সমকোণী ত্রিভুজ

এবার সমকোণী ত্রিভুজ ADF ও BCE-এর

AD=BC (প্রমাণিত)

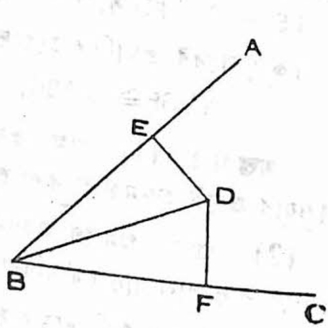
অতিভুজ AF=অতিভুজ BE (কল্পনানুসারে)

∴ △ADF ≅ △BCE, ∴ ∠FAD=∠CBE

কিন্তু এরা একান্তর কোণ, ∴ BE ∥ AF

2. ∠ABC-এর মধ্যে D এমন একটি বিন্দু যে D থেকে BA ও BC-এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুটির দৈর্ঘ্য সমান হয়। প্রমাণ কর যে, BD, ∠AEC-এর সমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন : ∠ABC-এর কৌণিক অঞ্চলে অবস্থিত D বিন্দু থেকে BA ও BC-এর উপর যথাক্রমে DE ও DF লম্ব। BD যুক্ত করা হ'ল। দেওয়া আছে DE=DF।



124নং চিত্র

প্রমাণ করতে হবে যে BD, ∠ABC-এর সমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ : ∵ DE ⊥ AB

∴ △BDF সমকোণী ত্রিভুজ ; আবার ∵ DF ⊥ BC,

△BDF সমকোণী ত্রিভুজ।

এবার সমকোণী ত্রিভুজ BDE ও BDF-এর
অতিভুজ BD সাধারণ, DE=DF (কল্পনানুসারে)

∴ △BDE ≅ △BDF ∴ ∠DBE = ∠DBF

অর্থাৎ, BD, ∠ABC-এর সমদ্বিখণ্ডক।

অনুশীলনী 15

1. △DEF-এর FE-কে BC-এর সমান করে EG পর্যন্ত বাঁধিত করে এবং DG যুক্ত করে উপপাদ্য 12 প্রমাণ কর।

2. D বিন্দুতে ∠BAC-এর সমান করে DF-এর যে পাশে E বিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশে ∠FDH অঙ্কন কর এবং DH থেকে AB-এর সমান করে DG কেটে নাও। এবার EG যুক্ত করে উপপাদ্য 12 প্রমাণ কর।

3. কোন ত্রিভুজের যে কোন দুটি শীর্ষবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য যদি সমান হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

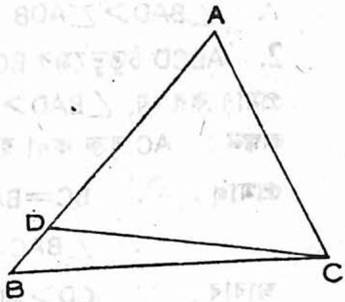
4. একটি ত্রিভুজের কোন বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব দুটির দৈর্ঘ্য সমান হলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

5. ABCD চতুর্ভুজের AB=AD এবং AC, BD-এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, BC=DC.

উপপাদ্য 13

একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু অসমান হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

ধরা যাক, △ABC-এর AB বাহু > AC বাহু।
প্রমাণ করতে হবে যে ∠ACB > ∠ABC



125 নং চিত্র

অঙ্কন : AB থেকে AC-এর সমান করে AD অংশ কেটে নেওয়া হ'ল। DC যুক্ত করা হ'ল।

প্রমাণ : △ACD-এর AC=AD (অঙ্কানুসারে)

∴ ∠ADC = ∠ACD, আবার △BCD-এর
বহিঃকোণ ∠ADC > বিপরীত অন্তঃস্থ ∠DBC
অর্থাৎ, ∠ADC > ∠ABC, কিন্তু ∠ACB > ∠ACD
∴ ∠ACB > ∠ADC, ∴ ∠ACB > ∠ABC

[**মন্তব্য** ঃ এখানে একটি কোণকে অপর একটি কোণের চেয়ে বড় দেখাতে হবে। আমরা পূর্বেই দেখেছি ত্রিভূজের বহিঃকোণ যে কোন অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের চেয়ে বড়। সে কথা চিন্তা করেই অঙ্কনটি করা হয়েছে]

অনুসিদ্ধান্ত 1. ত্রিভূজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তম।

অনুসিদ্ধান্ত 2. ত্রিভূজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ সূক্ষ্মকোণ হলে, ত্রিভূজটি সূক্ষ্মকোণী।

[বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তম (অনুসিঃ 1) বলে অন্য দুটি কোন তার চেয়ে ছোট। সুতরাং তারাও সূক্ষ্মকোণ। সুতরাং ত্রিভূজটি সূক্ষ্মকোণী।]

কয়েকটি প্রয়োগ ঃ

1. ABC একটি সমবাহু ত্রিভূজ। A বিন্দুকে বর্ধিত BC-এর উপর অবস্থিত D বিন্দুর সঙ্গে যুক্ত করা হ'ল।

প্রমাণ কর যে,

$\angle BAD > \angle ADB$

প্রমাণ ঃ

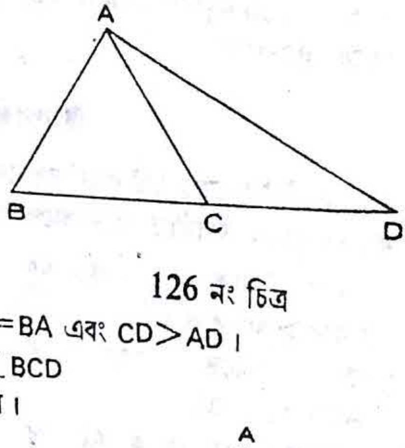
$\because$ $\triangle ABC$ সমবাহু

$\therefore$ $BC = AB$

$\because$ $DB = BC + CD$

$\therefore$ $DB > AB$

$\therefore$ $\angle BAD > \angle ADB$



126 নং চিত্র

2. ABCD চতুর্ভুজের $BC = BA$ এবং $CD > AD$।

প্রমাণ কর যে, $\angle BAD > \angle BCD$

অঙ্কন ঃ AC যুক্ত করা হ'ল।

প্রমাণ ঃ $\because$ $BC = BA$

$\therefore$ $\angle BAC = \angle BCA$

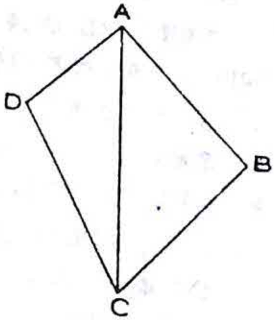
আবার $\because$ $CD > AD$

$\therefore$ $\angle DAC > \angle DCA$

$\therefore$ $\angle DAC + \angle BAC$

$> \angle DCA + \angle BCA$

অর্থাৎ $\angle BAD > \angle BCD$



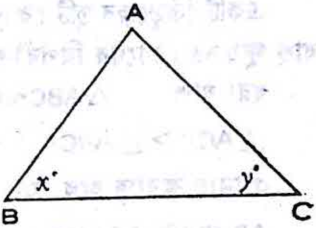
127 নং চিত্র

অনুশীলনী 16

1. 128 নং চিত্রে AC>AB এবং x ও y-এর মধ্যে, নিচের একটি সম্পর্ক বর্তমান :

(i) $x=2y$ (ii) $x=y$

(iii) $x=\frac{3}{5}y$. কোন্ সম্পর্কটি ঠিক ?



128 নং চিত্র

2. AC-কে বর্ধিত করে AD=AB কেটে নিয়ে উপপাদ্য 13 প্রমাণ কর।

3. △ABC-এর AC>AB। AC-এর উপর D এমন একটি বিন্দু যে ∠ADB=∠ABD হয়। প্রমাণ কর যে, ∠ABC>∠ACB.

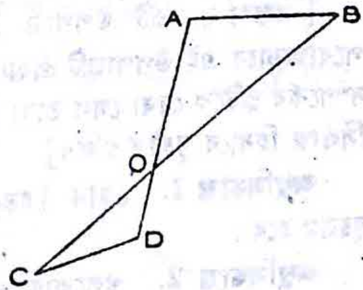
4. △ABC-এর AC=AB ; ∠ACB-এর সমদ্বিখণ্ডক AD-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে BD<CD.

5. ABC ত্রিভুজে BC-এর উপর AD লম্ব। AC>AB হলে, প্রমাণ কর যে, ∠CAD>∠BAD। আরও প্রমাণ কর যে, DC>BD.

6. কোন চতুর্ভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বাহু দুটি বিপরীত হলে, প্রমাণ কর যে বৃহত্তম বাহু সংলগ্ন যে কোন কোণ তার বিপরীত কোণের চেয়ে ছোট হবে।

7. 129 নং চিত্রে AB<OB এবং CD>OD

প্রমাণ কর যে ∠BAO>∠OCD



129 নং চিত্র

8. ABC ত্রিভুজের AB=7 সেমি, BC=5 সেমি ও CA=9 সেমি। ত্রিভুজের কোণগুলি মানের ঊর্ধ্ব-ক্রমানুসারে সাজাও।

9. △PQR-এর PQ>PR. PQ থেকে PR-এর সমান করে PS অংশ কেটে নেওয়া হল। RS যুক্ত করা হল।

প্রমাণ কর যে (i) $\angle PSR=\frac{1}{2}(\angle PQR+\angle PRQ)$

(ii) $\angle QRS=\frac{1}{2}(\angle PRQ-\angle PQR)$

10. ABC ত্রিভুজের AB>AC। ∠BAC-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। AB থেকে AC এর সমান করে AE অংশ কেটে নাও। DE যোগ কর। প্রমাণ কর যে (i) △ACD≅△AED। এ থেকে প্রমাণ কর যে, ∠ACB>∠ABC.

উপপাদ্য 14

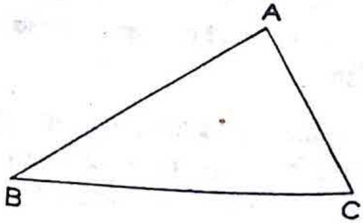
একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ অসমান হলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

ধরা যাক, $\triangle ABC$-এর

$\angle ACB > \angle ABC$

প্রামাণ করতে হবে যে

AB বাহু > AC বাহু।



130 নং চিত্র

প্রমাণ : AB ও AC-এর মধ্যে নিচের সম্পর্ক তিনটির যে কোন একটি হতে পারে :

(i) $AB < AC$, (ii) $AB = AC$, বা (iii) $AB > AC$

(i) $AB < AC$ হলে, $\angle ACB < \angle ABC$ হবে, কিন্তু দেওয়া আছে যে $\angle ACB > \angle ABC$, সুতরাং, $AB \nless AC$

(ii) $AB = AC$ হলে, $\angle ACB = \angle ABC$ হবে, কিন্তু কল্পনানুসারে এটিও অসম্ভব।

$\therefore$ $AB \neq AC$ $\quad\therefore$ $AB > AC$ অবশ্যই হতে হবে।

[**মন্তব্য :** এটি উপপাদ্য 13-এর বিপরীত উপপাদ্য। সুতরাং পরোক্ষভাবে এই উপপাদ্যটি প্রমাণ করা হ'ল। এখানে তিনটি সম্ভাব্য সম্পর্কের দুটিকে দেখা গেল তারা ঠিক নয়; তাই তৃতীয় সম্পর্কটি সঠিক সিদ্ধান্ত হিসাবে গৃহীত হ'ল।]

অনুসিদ্ধান্ত 1. কোন ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণের বিপরীত বাহু বৃহত্তম হবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. স্থূলকোণী ও সমকোণী ত্রিভুজে যথাক্রমে স্থূলকোণ ও সমকোণের বিপরীত বাহুই বৃহত্তম বাহু।

কয়েকটি প্রয়োগ :

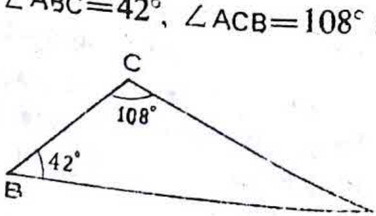
1. 131 নং চিত্রে $\triangle ABC$-এর $\angle ABC = 42^\circ$, $\angle ACB = 108^\circ$। AC ও BC বাহুর মধ্যে সম্পর্ক কি ?

উত্তর : $\triangle ABC$-এর

$\angle ABC = 42^\circ$, $\angle ACB = 108^\circ$

$\therefore$ $\angle BAC = 180^\circ - (42^\circ + 108^\circ) = 180^\circ - 150^\circ$

$= 30^\circ$



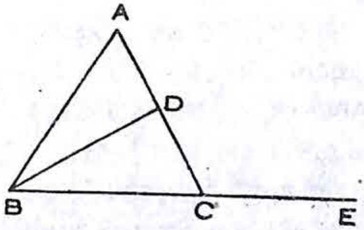
131 নং চিত্র

∴ $\angle ABC > \angle BAC$
∴ $AC > BC$.

2. একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC-এর AC ও বর্ধিত BC-এর উপর যথাক্রমে D ও E দুটি বিন্দু নেওয়া হইল। প্রমাণ কর যে, $BE > BD$.

অঙ্কন : BD যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : $\triangle ABD$-এর বহিঃকোণ $BDC >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle BAD$; কিন্তু $\angle BAC = \angle BCA$



132 নং চিত্র

[∵ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ সমান]

∴ $\angle BDC > \angle BCD$ ∴ $BC > BD$

∴ $BE = BC + CE > BD$

অনুশীলনী 17

1. $\triangle PQR$-এর $\angle PQR = 80°$, $\angle PRQ = 30°$. PR ও QR বাহুর মধ্যে সম্পর্ক কি ?

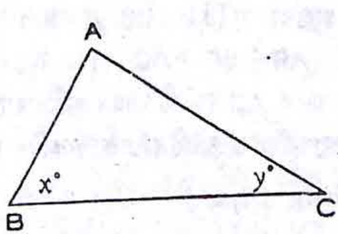
2. ABC ত্রিভুজের $\angle A = 55°$, $\angle B = 40°$. ত্রিভুজের বাহুগুলিকে তাদের দৈর্ঘ্যের ঊর্ধ্বক্রমানুসারে সাজাও।

3. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণ 70° প্রমাণ কর যে, ঐ ত্রিভুজের অসমান বাহুটিই বৃহত্তম বাহু।

4. 133 নং চিত্রে $x = \frac{3}{2}y$ হলে, AB ও AC বাহুর মধ্যে সম্পর্ক কি ?

5. $\triangle ABC$-এর $AB = AC$; AD রেখাংশ BC-এর সঙ্গে D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ কর যে, $AD < AC$.



133 নং চিত্র

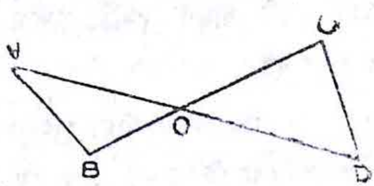
6. $\triangle ABC$-এর $AB = AC$. বর্ধিত BC-এর উপর D একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AD > AB$.

7. 134 নং চিত্রে $AB = CD$

$\angle OCD > \angle COD$

এবং $\angle OAB$ [illegible] $\angle AOB$

প্রমাণ কর যে, $OB < OC$



134 নং চিত্র

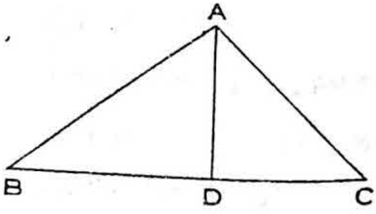
উপপাদ্য 15

একটি ত্রিভুজের যে কোন দুটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

ধরা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC$-এর যেকোন দুটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

ধরা যাক, BC বৃহত্তম বাহু। তাহলে এটা প্রমাণ করলেই যথেষ্ট হবে যে $AB+AC>BC$.



135 নং চিত্র

অঙ্কন : A থেকে BC-এর উপর AD লম্ব টানা হ্ল যা BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ : $\because \quad AD \perp BC$

$\therefore \quad \angle ADB$ ও $\angle ADC$-এর প্রত্যেকে 1 সমকোণ

$\therefore \quad \triangle ADB$ ও $\triangle ADC$ সমকোণী ত্রিভুজ।

সমকোণী ত্রিভুজে, যেহেতু, অপর কোণ দুটি সূক্ষ্মকোণ

$\therefore \quad \angle ADB > \angle BAD, \qquad \therefore \quad AB > BD$

অনুরূপে, $\angle ADC > \angle DAC, \qquad \therefore \quad AC > DC$

$\therefore \quad AB+AC > BD+DC, \qquad \therefore \quad AB+AC > BC$

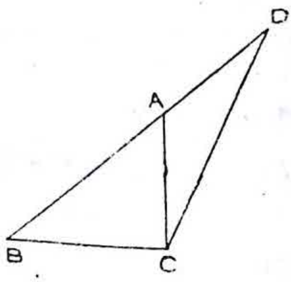
[**মন্তব্য :** (1) BC বৃহত্তম বাহু হলে, $BC>AC$ এবং $BC>AB$; সুতরাং $AB+BC>AC$ এবং $AC+BC>AB$ (2) লক্ষ কর, লম্ব টানার ফলে AC বাহুটি এমন দুটি অংশে বিভক্ত হ্ল যাদের এক একটি অংশ অপর বাহু দুইটির এক একটির চেয়ে ছোট। তাই লম্ব টানা হ্ল।]

বিকল্প প্রমাণ :

ধরা যাক, ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC$-এর যেকোন দুটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর চেয়ে বড়।

ধরা যাক, BC বৃহত্তম বাহু, তাহলে এটা প্রমাণ করলেই যথেষ্ট হবে যে, $AB+AC>BC$.



136 নং চিত্র

অঙ্কন : BA-কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল, যেন AD=AC হয়। DC যুক্ত কর।

প্রমাণ : △ACD-এর AD=AC (অঙ্কনানুসারে)

∴ ∠ACD=∠ADC

∴ ∠BCD=∠ACB+∠ACD>∠ADC

∴ △BCD-এর BD বাহু>BC বাহু, অর্থাৎ BA+AD>BC

∴ AB+AC>BC [∵ AD=AC]

[**মন্তব্য :** লক্ষ কর, AB ও AC রেখাংশ দুটির দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ পাওয়ার জন্যই BA-কে বর্ধিত করা হল, যাতে বর্ধিতাংশ AC-এর সমান হয়।]

অনুসিদ্ধান্ত : কোন ত্রিভুজের দুটি বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহুর চেয়ে ছোট হবে।

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. নিম্নলিখিত রেখাংশগুলি দিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব কিনা বিচার কর :

(i) 8 সেমি, 3 সেমি, 12 সেমি (ii) 6 সেমি, 8 সেমি, 10 সেমি (iii) 3 সেমি, 7 সেমি, 4 সেমি।

উত্তর : (i) বৃহত্তম রেখাংশের দৈর্ঘ্য=12 সেমি, অপর দুটি রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি=8 সেমি+3 সেমি=11 সেমি, 11 সেমি<12 সেমি

∵ ত্রিভুজের যেকোন দুটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের চেয়ে বড় হতে হবে,

∴ এক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়।

(ii) বৃহত্তম রেখাংশের দৈর্ঘ্য 10 সেমি, অপর দুটি রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি=6 সেমি+8 সেমি=14 সেমি, 14 সেমি>10 সেমি।

∵ ত্রিভুজের যেকোন দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের চেয়ে বড় হবে এবং বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্যের চেয়ে অপর দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি বড় হলেই যেকোন দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয়টি থেকে বড় হবে। সুতরাং এক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব।

(iii) বৃহত্তম রেখাংশের দৈর্ঘ্য=7 সেমি, অপর দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি=3 সেমি+4 সেমি=7 সেমি।

∵ ত্রিভুজের যেকোন দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর চেয়ে বড় হতে হবে ;

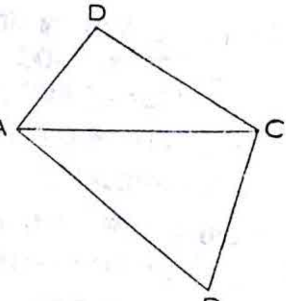
এক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়।

2. কোন চতুর্ভুজের যেকোন তিনটি বাহুর সমষ্টি চতুর্থ বাহুর চেয়ে বড় হবে।

মনে করি, ABCD একটি চতুর্ভুজ; এর বৃহত্তম বাহু AB.

প্রমাণ করতে হবে যে, যেকোন তিনটি বাহুর সমষ্টি চতুর্থ বাহুর চেয়ে বড়।

এটা প্রমাণ করলেই যথেষ্ট হবে যে $AD+DC+CB>AB$.



137 নং চিত্র

অঙ্কন : AC যুক্ত করা হল।
প্রমাণ : $\triangle ACD$-এর $AD+DC>AC$.
আবার $\triangle ACB$-এর $AC+CB<AB$.
$\therefore\ AD+DC+CB>AC+CB>AB$

3. প্রমাণ কর যে $\triangle ABC$-এর AD একটি মধ্যমা হলে
$$AB+AC>2AD.$$

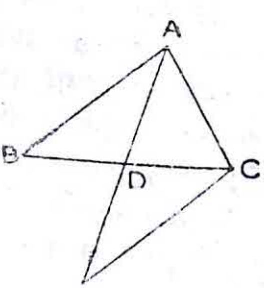
[প্রমাণের চেষ্টা করার আগে একটু বিচার করে দেখা যাক। আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোন দুটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর চেয়ে বড়। কাজেই আমরা যদি AB, AC ও 2AD দৈর্ঘ্যের বাহু নিয়ে একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করতে পারি, তাহলেই বর্তমান উপপাদ্যটি প্রমাণ করা সম্ভব। সেজন্য আমরা AD-কে বর্ধিত করে 2AD দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ AP নেব। এবার CP যুক্ত করে যদি CP-কে AB-এর সমান দেখাতে পারি, তাহলেই $\triangle ACP$-এর বাহু তিনটি AB, AC ও 2AD দৈর্ঘ্যের হবে, অর্থাৎ আমাদের উদ্দেশ্য সাধিত হবে। এবার এই বিচারকে কাজে লাগিয়ে প্রমাণটি করা হচ্ছে।]

ধরা যাক, $\triangle ABC$-এর AD মধ্যমা।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB+AC>2AD$.

অঙ্কন : AD-কে P বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, $DP=AD$ হয়। CP যুক্ত করা হল।

প্রমাণ : $\because$ AD মধ্যমা, $\therefore$ D, BC-এর মধ্যবিন্দু।

$\triangle ABD$ ও $\triangle PCD$ এর
$AD=DP$ (অঙ্কনানুসারে),



138 নং চিত্র

$BD = DC$ (কল্পনানুসারে)

$\angle ADB =$ বিপ্রতীপ $\angle PDC$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle PCD \quad \therefore AB = PC$

এবার $\triangle APC$-এর $AC + PC > AP \quad \therefore AC + AB > AD + DP$

$\therefore AB + AC > 2AD \qquad [\because AD = DP]$

অনুশীলনী 18

1. কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত রেখাংশগুলি দিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব ?

(i) 3 সেমি, 4 সেমি, 5 সেমি (ii) 8 সেমি, 8 সেমি, 10 সেমি

(iii) 6 সেমি, 3 সেমি, 9 সেমি (iv) 5 সেমি, 2 সেমি, 8 সেমি

(v) 6 সেমি, 4 সেমি, 7 সেমি (vi) 4 সেমি, 5 সেমি, 10 সেমি.

2. A, B, C তিনটি অসমরেখ বিন্দু। একজন লোক A থেকে রওয়ানা হয়ে সরাসরি B-তে যান। অপর একজন লোক একই সময়ে A থেকে রওয়ানা হয়ে C হয়ে B-তে যান। দুজনে একই সময়ে B-তে পেঁছুলে কার গতিবেগ বেশী ? যুক্তি দাও।

3. 12 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি তারকে বাঁকিয়ে ত্রিভুজাকৃতি করতে হলে বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য কত সেণ্টিমিটারের কম ও কত সেণ্টিমিটারের বেশী হতে হবে ? যুক্তি দাও।

4. একটি চতুর্ভুজের পরিসীমা কর্ণ দুটির দৈর্ঘ্যের চেয়ে বড়—প্রমাণ কর।

5. ABC ত্রিভুজের মধ্যে O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে,

(i) $AB + AC > OB + OC$

(ii) $AB + AC + BC > OA + OB + OC$.

[আভাস : (i) বর্ধিত BO যেন AC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে, $\triangle ABD$ ও $\triangle OCD$-এর বাহুগুলির সম্পর্ক বিচার কর।]

6. প্রমাণ কর যে, একটি চতুর্ভুজের পরিসীমা যেকোন কর্ণের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণের চেয়ে বড়।

7. $\triangle ABC$-এর মধ্যে P একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে,

(i) $AP + BP > AB$

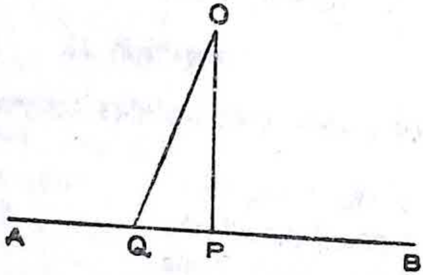
(ii) $AB + BC + CA < 2(AP + BP + CP)$.

8. প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের পরিসীমা তিনটি মধ্যমার সমষ্টির চেয়ে বড়।

9. প্রমাণ কর যে, একটি চতুর্ভুজের মধ্যে অবস্থিত (কিন্তু কোন কর্ণের উপর অবস্থিত নয়) কোন বিন্দু থেকে শীর্ষবিন্দুগুলির দূরত্বের সমষ্টি কর্ণ দুটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টির চেয়ে বড়। এবার বলতো বিন্দুটি কোথায় অবস্থিত হলে, ঐ বিন্দু থেকে শীর্ষবিন্দুগুলির দূরত্ব সবচেয়ে কম হবে ?

উপপাদ্য 16

একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত যে সকল রেখাংশ অঙ্কন করা যায়, তার মধ্যে লম্বের দৈর্ঘ্যই ক্ষুদ্রতম।



139 নং চিত্র

ধরা যাক, AB যেকোন একটি সরলরেখা এবং O তার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। আরও ধরা যাক, OP, AB-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে O, বিন্দু থেকে AB সরলরেখা পর্যন্ত অন্য যে সকল রেখাংশ অঙ্কন করা যাবে তাদের প্রত্যেকের থেকেই OP ছোট।

অঙ্কন : AB সরলরেখার উপর যেকোন একটি বিন্দু Q নেওয়া হল। OQ যুক্ত করা হল।

প্রমাণ : $\because$ $OP \perp AB$

$\therefore$ $\angle OPQ = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle OPQ > \angle OQP$

$\therefore$ $\triangle OQP$-এর $OQ > OP$

অর্থাৎ $OP < OQ$

এ সিদ্ধান্ত AB-এর উপর Q-এর যে কোন অবস্থানের জন্যই সত্য।

$\therefore$ OP-এর দৈর্ঘ্যই ক্ষুদ্রতম।

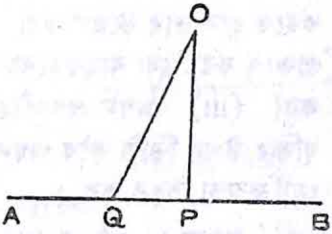
[**মন্তব্য :** (1) কোন সরলরেখা থেকে কোন বিন্দুর দূরত্ব বলতে আমরা লম্ব-দূরত্বই বুঝি।

(2) কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত যে সকল রেখাংশ অঙ্কন করা যায় তাদের মধ্যে লম্ব ছাড়া অন্য রেখাংশগুলিকে তির্যক বলা হয়।]

কয়েকটি প্রয়োগ :

1. কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশগুলির মধ্যে যেটি ক্ষুদ্রতম, সেটি ঐ সরলরেখার উপর লম্ব হবে।

ধরা যাক, AB একটি সরলরেখা এবং O ঐ সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু। O থেকে AB পর্যন্ত যতগুলি রেখাংশ টানা যায় তার মধ্যে, মনে করি, OP ক্ষুদ্রতম।



140 নং চিত্র

প্রমাণ করতে হবে যে OP, AB-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ : যদি OP, AB-এর উপর লম্ব না হয় তাহলে, মনে করা যাক, OQ, AB-এর উপর লম্ব।

∴ OQ, O বিন্দু থেকে AB পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশগুলির মধ্যে ক্ষুদ্রতম।

আবার কল্পনানুসারে, OP ক্ষুদ্রতম।

∴ $OQ=OP$ ∴ $\angle OPQ=\angle OQP$

কিন্তু $\angle OQP=1$ সমকোণ

∴ $\angle OPQ=1$ সমকোণ

কিন্তু এ অসম্ভব যদি না OQ ; OP একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়।

∴ OP, AB-এর উপর লম্ব।

অনুশীলনী 19

1. পূর্ব-পশ্চিমমুখী একটি রাস্তায় যাওয়ার জন্য রাস্তার উত্তরদিকে অবস্থিত কোন একটি স্থান থেকে দুই ব্যক্তির একজন দক্ষিণদিকে ও অপর জন উত্তর পূর্বদিক বরাবর গেলেন। সমবেগে চললে কে আগে রাস্তায় পৌঁছুবেন ? যুক্তি দাও।

2. AB সরলরেখার বহিঃস্থ O বিন্দু থেকে AB-এর ন্যূনতম দূরত্ব OC ; OD ও OE এমন দুটি তির্যক যে $CD>CE$. প্রমাণ কর যে, $OD>OE$

3. ABCD চতুর্ভুজের $AB=AD$ এবং $BC=DC$. D বিন্দু থেকে AC-এর ন্যূনতম দূরত্ব DP. প্রমাণ কর যে B, P ও D একই সরলরেখায় অবস্থিত।

চতুর্থ অধ্যায়

সম্পাদ্য

4.1. জ্যামিতিক যন্ত্রপাতির সাহায্যে জ্যামিতিক চিত্র বিধিবদ্ধভাবে অঙ্কন করাকেই **সম্পাদ্য** বলে।

সম্পাদ্যের চারিটি অংশ : (i) কি শর্ত দেওয়া আছে এবং কি অঙ্কন করতে হবে তার উল্লেখ করা (ii) প্রদত্ত শর্তগুলিকে চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা এবং নামকরণের সাহায্যে কি অঙ্কন করতে হবে তার উল্লেখ করা (iii) অঙ্কন প্রণালীর বিস্তারিত বিবরণ দেওয়া এবং (iv) যে যুক্তির উপর ভিত্তি করে অঙ্কনটি করা হল তা অর্থাৎ অঙ্কন প্রণালীর যৌক্তিকতা বিবৃত করা।

[মন্তব্য : ষষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণীতে যে সব সম্পাদ্য শিখেছ তাদের ক্ষেত্রে চতুর্থ অংশ বাদ দিতে হয়েছে কারণ যৌক্তিকতা বিচারের জন্য যে সব জ্যামিতিক ধর্ম জানা প্রয়োজন তা তোমরা জানতে না। অনুশীলনী 14-এর 5নং প্রশ্নের উত্তর করে তোমরা সে সব যৌক্তিকতা জানতে পেরেছ। এই শ্রেণীতেও তোমরা যে সব সম্পাদ্য শিখবে তারও কোন কোন ক্ষেত্রের প্রমাণ তোমরা পরবর্তী শ্রেণীতে জানতে পারবে।]

সম্পাদ্যের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত বিষয়গুলির উপর লক্ষ রাখতে হবে :

(i) প্রদত্ত শর্তগুলি চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করতে হবে।

(ii) যেখানে সম্ভব সেখানে রুলার ও পেন্সিল কম্পাসই মাত্র ব্যবহার করতে হবে।

(iii) প্রতিটি অঙ্কনের চিহ্ন অবশ্যই থাকতে হবে।

(iv) অঙ্কনটি নিখুঁত ও পরিষ্কার হওয়া বাঞ্ছনীয়।

(v) প্রতিটি অঙ্কনের বিবরণ অঙ্কন প্রণালীতে অবশ্যই দিতে হবে, তবে পূর্বে অঙ্কিত কোন অঙ্কন (সম্পাদ্য) এর সাহায্য নিলে তার বিস্তারিত বিবরণ দেওয়ার প্রয়োজন নেই।

এবার আমরা কয়েকটি সম্পাদ্যের অঙ্কন প্রণালী দেখব।

সম্পাদ্য 1

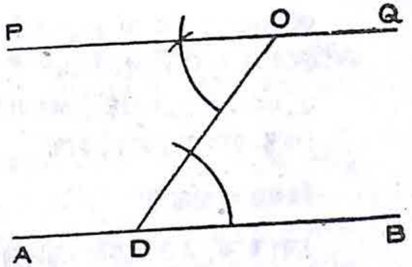
একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করে একটি সরলরেখা অঙ্কন করতে হবে।

প্রথম পদ্ধতি :

ধরা যাক, AB একটি সরলরেখা এবং O তার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

O বিন্দু দিয়ে AB সরলরেখার সমান্তরাল করে একটি সরলরেখা অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী : AB সরলরেখার উপর একটি বিন্দু D নেওয়া হল। OD যুক্ত করা হল। OD-এর O বিন্দুতে OD-এর যে পাশে ∠ODB অবস্থিত তার বিপরীত দিকে ∠ODB-এর সমান করে ∠DOP অঙ্কন করা হল, PO-কে বর্ধিত করা হল এবং বর্ধিতাংশে একটি বিন্দু Q নেওয়া হল।



141 নং চিত্র

তাহলে PQ সরলরেখাই হল উদ্দিষ্ট সরলরেখা যা AB-এর সমান্তরাল এবং O বিন্দুগামী।

প্রমাণ : AB ও PQ দুটি সরলরেখাকে OD সরলরেখা যথাক্রমে D ও O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

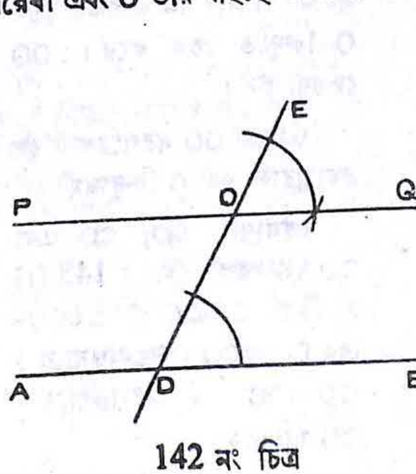
∠BDO=∠DOP (অঙ্কনানুসারে);
কিন্তু এরা একান্তর কোণ, ∴ AB ∥ PQ.

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

ধরা যাক, AB একটি সরলরেখা এবং O তার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

O বিন্দু দিয়ে AB সরলরেখার সমান্তরাল করে একটি সরলরেখা অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী : AB সরলরেখার উপর D একটি বিন্দু নেওয়া হল। DO যুক্ত করে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। OD-এর যে দিকে ∠BDO অবস্থিত সে দিকেই O বিন্দুতে ∠BDO-এর সমান করে ∠EOQ অঙ্কন করা হল। QO-কে বর্ধিত করা হল। বর্ধিত অংশে P একটি বিন্দু নেওয়া হল। তাহলে



142 নং চিত্র

PQ সরলরেখাই হবে উদ্দিষ্ট সরলরেখা যা AB-এর সমান্তরাল এবং O বিন্দুগামী।

প্রমাণ ঃ AB ও PQ দুটি সরলরেখা এবং DO সরলরেখা এদের যথাক্রমে D ও O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

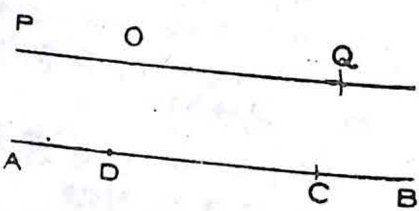
∠BDO=∠QOE (অঙ্কনানুসারে)

কিন্তু এরা অনুরূপ কোণ, ∴ AB ‖ PQ

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

ধরা যাক, AB একটি সরলরেখা এবং O তার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

O বিন্দু দিয়ে AB সরলরেখার সমান্তরাল করে একটি সরলরেখা অঙ্কন করতে হবে।



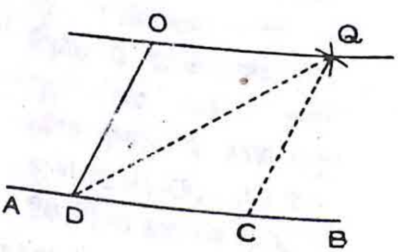
143 নং চিত্র

অঙ্কন প্রণালী ঃ AB সরলরেখার উপর D একটি বিন্দু নেওয়া হল। DB থেকে যে কোন একটি রেখাংশ DC কেটে নেওয়া হল। এবার C বিন্দুকে কেন্দ্র করে DO-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল। আবার O বিন্দুকে কেন্দ্র করে DC-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল যা পূর্বের বৃত্তচাপকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। OQ যুক্ত করে উভয়দিকে বর্ধিত করে দেওয়া হল।

তাহলে OQ সরলরেখাই হল উদ্দিষ্ট সরলরেখা যা AB সরলরেখার সমান্তরাল এবং O বিন্দুগামী।

প্রমাণ ঃ DO; CQ এবং DQ যুক্ত করা হল (143 (i) নং চিত্র) △DOQ ও △DCQ-এর DO=CQ (অঙ্কনানুসারে)
OQ=DC (অঙ্কনানুসারে)
DQ সাধারণ,

∴ △DOQ≅△DCQ
∴ ∠DQO=∠QDC
কিন্তু এরা একান্তর কোণ, ∴ OQ ‖ AB



143 (i) নং চিত্র

অনুশীলনী 20

1. PQ একটি সরলরেখা। তার বহিঃস্থ X বিন্দু দিয়ে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল করে একটি সরলরেখা অঙ্কন কর।

2. রুলার ও কম্পাসের সাহায্যে 60°-এর সমান করে ∠ABC অংকন কর। C বিন্দু দিয়ে BA-এর এবং A বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন কর।

3. 7 সেমি, 4 সেমি ও 5 সেমি বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর; ত্রিভুজটি তিনটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে তাদের বিপরীত বাহুগুলির সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন কর। এর ফলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হল, তার বাহুগুলি ও কোণগুলি মাপ এবং মূল ত্রিভুজের বাহুগুলি ও কোণগুলির সঙ্গে ঐ বাহুগুলি ও কোণগুলির কি সম্পর্ক তা নির্ণয় কর।

4. ABC একটি ত্রিভুজ। AB-কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। D বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন কর। মনে কর ঐ সমান্তরাল সরলরেখা AC-কে E বিন্দুতে ছেদ করে; AE, CE মেপে দেখ তাদের মধ্যে সম্পর্ক কি? DE, BC-ও মেপে দেখ এবং তাদের মধ্যে সম্পর্ক কি লেখ।

5. ABCD চতুর্ভুজের AB = 4 সেমি, BC = 5 সেমি, CD = 6 সেমি, DA = 4·5 সেমি এবং কর্ণ AC = 7·2 সেমি। চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর। B বিন্দু দিয়ে AC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন কর।

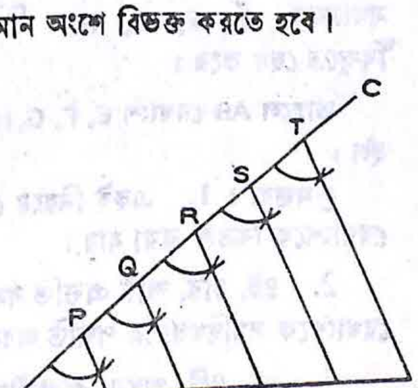
6. 5 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন কর। AB ও BC বাহু দুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। মনে কর, মধ্যবিন্দু দুটি যথাক্রমে D ও E. D বিন্দু দিয়ে BC-এর এবং E বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরাল অঙ্কন কর। দেখ তো তারা কোথায় পরস্পরকে ছেদ করল?

সম্পাদ্য 2

একটি রেখাংশকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত করতে হবে।

ধরা যাক, AB রেখাংশকে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত করতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী : A বিন্দু দিয়ে AB-এর সঙ্গে কোণ করে AC একটি রেখাংশ অঙ্কন করা হল যা C-এর দিকে সীমাহীন ভাবে বিস্তৃত। AC থেকে পর



144 নং চিত্র

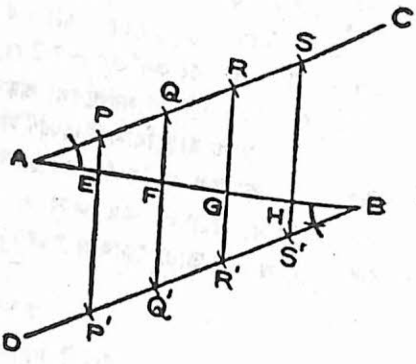
পর একই দৈর্ঘ্যের AP, PQ, QR, RS, ST অংশ কেটে নেওয়া হল। BT যুক্ত করা হল। S, R, Q, P বিন্দুগুলিতে ∠ATB-এর সমান করে AC-এর যে পাশে ঐ কোণটি অবস্থিত সেদিকে কোণগুলি অঙ্কন করা হল। ঐ কোণের বাহুগুলি AB-কে যথাক্রমে H, G, F ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে AB রেখাংশ E, F, G, H বিন্দুতে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত হল।

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

ধরা যাক, AB রেখাংশকে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত করতে হবে।

অঙ্কন প্রণালী : A বিন্দুতে যে কোন একটি কোণ ∠BAC অঙ্কন করা হল। AB-এর যে পাশে ∠BAC অবস্থিত তার বিপরীত পাশে ঐ কোণের সমান করে ∠ABD অঙ্কন করা হল। AC থেকে পর পর একই দৈর্ঘ্যের চারটি সমান অংশ AP, PQ, QR, RS কেটে নেওয়া হল। BD থেকেও পর পর ঐ একই দৈর্ঘ্যের সমান চারটি অংশ BS', S'R', R'Q' এবং Q'P' কেটে নেওয়া হল। এখন PP', QQ', RR', SS' যুক্ত করা হল। PP', QQ', RR', SS' AB রেখাংশকে যথাক্রমে E, F, G, H বিন্দুতে ছেদ করে।



145 নং চিত্র

তাহলে AB রেখাংশ E, F, G, H বিন্দুতে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত হল।

[মন্তব্য : 1. একই নিয়মে যে কোন সংখ্যক সমান অংশে একটি রেখাংশকে বিভক্ত করা যায়।

2. দুই, চার, আট প্রভৃতি সমান অংশে বিভক্ত করার জন্য অবশ্য রেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডনের পদ্ধতি অবলম্বন করতে পার।

3. এই দুটি অঙ্কন প্রণালীর যৌক্তিকতা তোমরা নবম শ্রেণীতে বুঝতে পারবে। তবে কাঁটা কম্পাস দিয়ে মেপে দেখ অংশগুলি সমান হয় কিনা।]

অনুশীলনী 21

1. 8·2 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশকে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর।

2. 10 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশকে সমান সাত অংশে বিভক্ত কর।

3. একটি রেখাংশকে উপরের যেকোন প্রণালীতে সমান চার অংশে বিভক্ত কর। ঐ রেখাংশকেই আবার সমদ্বিখণ্ডণ প্রণালীতে সমান চার অংশে বিভক্ত কর। দেখ বিভাজন বিন্দুগুলি একই হয়েছে কি না?

4. ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা অঙ্কন কর। মধ্যমাটিকে AE, EF, FD এই তিনটি সমান অংশে বিভক্ত কর। BF যুক্ত করে বর্ধিত কর যেন AC কে X বিন্দুতে ছেদ করে। AX ও CX-এর মধ্যে সম্পর্ক স্কেল দিয়ে মেপে নির্ণয় কর।

5. AB, CD ও EF তিনটি রেখাংশ অঙ্কন কর, যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সেমি, 5 সেমি ও 8 সেমি। একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর যার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য $\frac{2}{3}$AB, $\frac{4}{5}$CD এবং $\frac{1}{2}$EF. ত্রিভুজের বাহুগুলি মেপে বলতো ত্রিভুজটি কি ধরনের ত্রিভুজ হল?

পঞ্চম অধ্যায়

বর্তমান বছরের পাঠের পুনরালোচনা

তৃতীয় অধ্যায়ে যে সব উপপাদ্য প্রমাণ করা হয়েছে বা যে সব অনুশীলনীর তোমরা সমাধান করেছ তাতে দেখেছ পূর্ববর্তী তথ্যগুলি ব্যবহার করতে হয়েছে। কোন প্রতিজ্ঞা প্রমাণের জন্য কোন্ কোন্ তথ্য ব্যবহার করতে হবে তা বোঝাই হচ্ছে প্রধান কাজ। কাজেই কোন্ তথ্য প্রমাণের জন্য পূর্বের কোন্ তথ্য কাজে লাগাতে পার, তার একটি তালিকা নিচে দেওয়া হল :

	কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
1.	একটি কোণ সমকোণ	(1) একটি সরলরেখার উপর আর একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হলে, সন্নিহিত কোণ দুটি সমান। (2) একটি সরলরেখার উপর আর একটি সরলরেখা লম্ব। (3) একটি ত্রিভুজের একটি কোণ অপর দুটি কোণের সমষ্টির সমান।
2.	দুটি রেখাংশ একই সরলরেখায় অবস্থিত বা, তিনটি বিন্দু সমরেখ	(1) যদি ঐ দুটি রেখাংশ দ্বারা উৎপন্ন কোণের মান 180° (2) রেখাংশ দুটির সাধারণ বিন্দুগামী কোন সরলরেখার উপর ঐ রেখাংশ দুটি লম্ব। (3) রেখাংশ দুটির সাধারণ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত যে কোন সরলরেখার সঙ্গে রেখাংশ দুটি বিপরীত দিকে সমান কোন উৎপন্ন করে। (4) তিনটি বিন্দুর যে কোন একটির সঙ্গে (বিশেষ করে অন্তর্বর্তী বিন্দুটির সঙ্গে) অন্য বিন্দু দুটি যোগ করে উপরে উল্লিখিত ধর্মগুলির যে কোনটি পাওয়া যায়।

	কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
3.	দুটি কোণ সমান	(1) কোণ দুটির প্রত্যেকে সমকোণ। (2) একটি সরলরেখার উপর অপর একটি সরলরেখা লম্বভাবে অবস্থিত। (3) তারা বিপ্রতীপ কোণ। (4) দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে, কোণ দুটি অনুরূপ বা একান্তর কোণ। (5) কোণ দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ। (6) কোণ দুটি সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ। (7) দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণের সমষ্টি অপরটির দুটি কোণের সমষ্টির সমান হলে, কোণ দুটি ঐ ত্রিভুজ দুটির তৃতীয় কোণ।
4.	দুটি রেখাংশ সমান	(1) কোন ত্রিভুজের দুটি কোণ সমান। (2) রেখাংশ দুটি দুটি সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু।
5.	দুটি ত্রিভুজ সর্বসম	(1) দুটি বাহু ও অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান। (2) দুটি কোণ ও একটি অনুরূপ বাহু সমান। (3) তিনটি বাহু সমান [মনে রাখবে, তিনটি কোণ সমান বা দুটি বাহু ও একটি বাহুর বিপরীত কোণ সমান হলে দুটি ত্রিভুজ সর্বসম নাও হতে পারে।] (4) ত্রিভুজ দুটি সমকোণী ত্রিভুজ হলে অতিভুজ ও অপর যে কোন একটি বাহু সমান।

	কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
6.	দুটি সরলরেখা সমান্তরাল	(1) সরলরেখা দুটিকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে দুটি অনুরূপ কোণ বা দুটি একান্তর কোণ সমান বা ভেদকের একই পাশের দুটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান । (2) সরলরেখা দুটি অন্য কোন সরল রেখার উপর লম্ব। (3) সরলরেখা দুটির প্রত্যেকেই অপর একটি সরলরেখার সমান্তরাল ।
	একটি সরলরেখা অপর একটি সরল-রেখার উপর লম্ব	(1) সন্নিহিত কোণ দুটি সমান। (2) সরলরেখা দুটির উপর অবস্থিত দুটি বিন্দু যোগ করলে যে ত্রিভুজ হবে তার অপর দুটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণ । (3) একটির উপরে অবস্থিত কোন বিন্দু থেকে অপর সরলরেখা পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশগুলির মধ্যে ঐটির দৈর্ঘ্যই ন্যূনতম ।
8.	দুটি রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপর একটি রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমান	(1) তৃতীয় রেখাংশ থেকে কোন একটি রেখাংশের সমান অংশ কেটে নিয়ে অপর অংশ দ্বিতীয় রেখাংশের সমান ।
9.	দুটি কোণের সমষ্টি অপর একটি কোণের সমান	(1) তৃতীয় কোন কোণ থেকে একটি কোণের সমান অংশ কেটে নিয়ে অপর অংশ দ্বিতীয় কোণের সমান। (2) বৃহত্তম কোণটি একটি ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এবং প্রথম দুটি কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ ।

	কি প্রমাণ করতে হবে	কি কি দেওয়া থাকলে প্রমাণ করা যাবে
10.	একটি রেখাংশ দ্বিতীয় একটি রেখাংশের চেয়ে বড়	(1) দ্বিতীয় রেখাংশকে প্রথম রেখাংশের উপর এমনভাবে স্থাপন করা যায় যে দুটির একটি সাধারণ প্রান্ত বিন্দু এবং তার ফলে দ্বিতীয় রেখাংশের অপর প্রান্ত বিন্দু প্রথম রেখাংশের ভেতরে পড়ে। (2) রেখাংশ দুটি এমন একটি ত্রিভুজের বাহু হয় যার প্রথম রেখাংশের বিপরীত কোণ দ্বিতীয় রেখাংশের বিপরীত কোণের চেয়ে বড়।
11.	একটি কোণ দ্বিতীয় একটি কোণের চেয়ে বড়	(1) কোণ দুটির একই শীর্ষবিন্দু এবং একটি সাধারণ বাহু থাকে এবং কোণ দুটি সাধারণ বাহুর একই দিকে অবস্থিত হয় এবং দ্বিতীয় কোণের অপর বাহু যদি প্রথম কোণের অপর বাহুর চেয়ে সাধারণ বাহুর নিকটবর্তী থাকে। (2) কোণ দুটি এমন একটি ত্রিভুজের কোণ, যার প্রথম কোণটির বিপরীত বাহু দ্বিতীয় কোণটির বিপরীত বাহুর চেয়ে বড়।
12.	তিনটি রেখাংশ একটি ত্রিভুজ গঠন করবে	(1) ছোট রেখাংশ দুটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি সব চেয়ে বড় রেখাংশের দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বড়।
13.	একটি ত্রিভুজ স্থূলকোণী, সমকোণী বা সূক্ষ্মকোণী	(1) ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ স্থূলকোণ, সমকোণ বা সূক্ষ্মকোণ।

বিবিধ প্রশ্নমালা—1

1. চিত্র সহ সংজ্ঞা দাও :

(i) সমকোণী ত্রিভুজ (ii) স্থূলকোণী ত্রিভুজ (iii) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ (iv) বিষমবাহু ত্রিভুজ (v) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (vi) সমবাহু ত্রিভুজ (vii) অতিভুজ (viii) মধ্যমা (ix) ট্রাপিজিয়ম (x) সামান্তরিক (xi) আয়তক্ষেত্র (xii) বর্গক্ষেত্র (xiii) রম্বস (xiv) সুষম বহুভুজ (xv) কর্ণ।

2. সংজ্ঞা থেকে নিম্নলিখিত নামের চিত্রগুলির কি ধর্ম পাওয়া যায় তা লেখ :

(i) সমকোণী ত্রিভুজ (ii) স্থূলকোণী ত্রিভুজ (iii) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ (iv) বিষমবাহু ত্রিভুজ (v) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (vi) সমবাহু ত্রিভুজ (vii) ট্রাপিজিয়ম (viii) সামান্তরিক (ix) আয়তক্ষেত্র (x) বর্গক্ষেত্র (xi) রম্বস (xii) সুষম বহুভুজ।

3. একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হওয়ার ফলে যে দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাদের মধ্যে সম্পর্ক কি ?

4. দুটি সন্নিহিত কোণ পরস্পর সম্পূরক হলে, তাদের সাধারণ বাহু ছাড়া অন্য বাহু দুটি কি ভাবে অবস্থিত হবে ?

5. দুটি বিপ্রতীপ কোণের মধ্যে সম্পর্ক কি ?

6. কি কি শর্তে দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হবে ?

7. কি কি শর্তে দুটি সমকোণী ত্রিভুজ সর্বসম হবে ?

8. দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে, ত্রিভুজ দুটির বাহুগুলির মধ্যে ও কোণগুলির মধ্যে সম্পর্ক কি ?

9. একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু সমান হলে, তাদের বিপরীত কোণ দুটির মধ্যে সম্পর্ক কি ?

10. একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু অসমান হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণের সঙ্গে ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণের সম্পর্ক কি ?

11. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ সমান হলে, তাদের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক কি ?

12. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ অসমান হলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহুর সঙ্গে ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহুর সম্পর্ক কি ?

13. কি কি শর্তে দুটি সরলরেখা সমান্তরাল হয় ?

14. দুটি সরলরেখা সমান্তরাল হলে, তা থেকে আমরা কি কি পাই ?

15. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি কত ?

16. একটি ত্রিভুজের কোন বহিঃকোণের সঙ্গে দুটি বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমষ্টির সম্পর্ক কি ?

17. একটি ত্রিভুজের কোন বহিঃকোণের সঙ্গে যে কোন একটি বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সম্পর্ক কি ?

18. একটি বিন্দু থেকে কোন সরলরেখা পর্যন্ত যে সব রেখাংশ টানা যায় তাদের মধ্যে কোনটি সবচেয়ে ছোট ?

19. ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যে সম্পর্ক কি যা সব ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য ?

20. দুটি সরলরেখার একটি আর একটির উপর কখন লম্ব হবে ?

21. n সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি কত ?

22. n সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট কোন বহুভুজের বাহুগুলি একই দিকে নির্দিষ্ট ক্রমে বর্ধিত করা হলে যে বহিঃকোণগুলি উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি কত ?

23. n বাহু বিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণের মান কত ?

24. n বাহু বিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজের প্রতিটি বহিঃকোণের মান কত ?

25. নিজের খাতায় ছকটি তৈরি করে ছকটি পূরণ কর ।

যে সকল উপপাদ্য প্রমাণ করেছ তাদের ক্রমিক সংখ্যা	সেগুলি প্রমাণ করতে যে সকল স্বতঃসিদ্ধ বা স্বীকৃত সিদ্ধান্তের সাহায্য নিয়েছ তাদের উল্লেখ	যে সকল উপপাদ্যের সাহায্য নিয়েছ তাদের উল্লেখ
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		

বিবিধ প্রশ্নমালা 2

1. শূন্যস্থানগুলি পূরণ করার জন্য সঠিক শব্দ বেছে তোমার খাতায় লেখ

(i) একটি সরলরেখার উপর অপর একটি রেখাংশ দণ্ডায়মান হলে যে দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাদের একটির মান 62° হলে অপরটির মান —— হবে ।

(ii) $\angle ABC$ ও $\angle DBC$ সন্নিহিত কোণ দুটির সমষ্টি দুই সমকোণ হলে, A, B, D বিন্দু তিনটি —— হবে।

(iii) দুটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করে যে চারটি কোণ উৎপন্ন করেছে তার একটি সমকোণ। অপর তিনটি কোণ পরস্পর —— এবং তাদের প্রত্যেকটির মান —— ——।

(iv) দুটি সমান্তরাল সরলরেখার ছেদকের একই পাশের দুটি অন্তঃকোণের একটির মান 132° ; অপরটির মান হবে ——।

(v) একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক যে কোণ উৎপন্ন করে তার মান ——।

(vi) সমবাহু ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর —— এবং প্রত্যেকটি কোণের মান ——।

(vii) একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের সমষ্টি 90° হলে, ত্রিভুজটি —— হবে।

(viii) একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অতিভুজ সংলগ্ন দুটি কোণের প্রত্যেকটির মান —— হবে।

(ix) একটি বিন্দুতে মোট কোণের পরিমাণ ——।

(x) $\triangle ABC$ ও $\triangle PQR$-এর $AB = QR$, $\angle ACB = \angle QPR$ এবং $\angle ABC = \angle PRQ$ হলে, ত্রিভুজ দুটি —— হবে এবং BC বাহু —— বাহুর সমান হবে।

(xi) $\triangle PQR$ ও $\triangle XYZ$-এর $PQ = ZX$, $QR = XY$ এবং $PR = ZY$ হলে, ত্রিভুজ দুটি —— হবে এবং $\angle PQR$ —— এর সমান হবে।

(xii) একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের চেয়ে —— হবে।

(xiii) দুটি সরলরেখার প্রত্যেকটি তৃতীয় একটি সরলরেখার সমান্তরাল হলে, প্রথম সরলরেখা দুটি পরস্পর —— হবে।

2. যে বিবৃতিগুলি ঠিক সেগুলির নম্বর খাতায় লিখে তাদের পাশে '✓' চিহ্ন এবং যেগুলি ভুল সেগুলির নম্বর খাতায় লিখে তাদের পাশে '×' চিহ্ন দাও।

(i) একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সেমি ও 6 সেমি। 6 সেমি বাহুর বিপরীত কোণ 113°.

(ii) একটি ত্রিভুজের একটি কোণ 108° এবং তার বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি এবং অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি।

(iii) একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুটি কোণের প্রত্যেকটির মান 45°

(iv) একটি বহুভুজ সুষম হতে হলে, তার প্রত্যেকটি বহিঃকোণের ডিগ্রীর সংখ্যা 1 ও 2 ছাড়া 360 এর যে কোন গুণনীয়ক হবে।

(v) একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সেমি ও 6 সেমি ; অপর বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সেমি এর সমান বা 10 সেমি থেকে কম হবে।

(vi) দুটি ত্রিভুজের একটির তিনটি কোণ যথাক্রমে অপরটির তিনটি কোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।

(vii) একটি রেখাংশের দুটি প্রান্তবিন্দুতে দুটি লম্ব টানলে তারা সমান্তরাল হবে।

(viii) সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজই বৃহত্তম বাহু।

(ix) দুটি সরলরেখাকে তৃতীয় একটি সরলরেখা ছেদ করলে, দুটি একান্তর কোণ সমান হবে।

(x) দুটি সন্নিহিত কোণ সমান হলে কোণ দুটির প্রত্যেকটি সমকোণ হবে।

(xi) দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি বাহু ও যেকোন একটি কোণ অপরটির দুটি বাহু ও যেকোন একটি কোণ সমান হলে, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।

(xii) দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণ ও যেকোন একটি বাহু অপরটির দুটি কোণ ও যেকোন একটি বাহু সমান হলে, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।

(xiii) AB সরলরেখার বহিঃস্থ O বিন্দু থেকে OR, AB-এর উপর লম্ব এবং Q ঐ সরলরেখার উপর একটি বিন্দু। OR-এর দৈর্ঘ্য OQ-এর দৈর্ঘ্যের চেয়ে ছোট।

3. প্রশ্নগুলির উত্তরে 'হ্যাঁ' কি 'না' লেখ ঃ

(i) $\angle POQ$ ও $\angle QOR$ সন্নিহিত কোণ দুটির মান যথাক্রমে 130° ও 50° হলে P, O, R বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হবে কি?

(ii) 3 সেমি, 5 সেমি, 8 সেমি রেখাংশ তিনটি দিয়ে একটি ত্রিভুজ গঠন করা যাবে কি?

(iii) একটি ত্রিভুজের যেকোন দুটি কোণের সমষ্টি 180° হবে কি?

(iv) একটি সমকোণী ত্রিভুজ সমবাহু হবে কি?

(v) একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু হতে পারে কি?

(vi) কোন বহুভুজের একটি কোণ 145°; বহুভুজটি সুষম হতে পারে কি?

(vii) দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার প্রত্যেকটিই তৃতীয় একটি সরলরেখার সমান্তরাল হতে পারে কি?

(viii) দুটি সমান্তরাল সরলরেখার ছেদকের একই পাশের দুটি বহিঃকোণ পরস্পর সমান হতে পারে কি?

(ix) 10 সেমি, 8 সেমি ও 5 সেমি দৈর্ঘ্যের তিনটি রেখাংশ দিয়ে একটি ত্রিভুজ গঠন সম্ভব কি?

(x) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও কি সমদ্বিখণ্ডিত করবে কি ?

(xi) একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু অপর একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর সমান। ত্রিভুজ দুটির তৃতীয় বাহু সর্বদাই সমান হবে কি ?

(xii) একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ অপর একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের সমান। ত্রিভুজ দুটির তৃতীয় কোণ সর্বদাই সমান হবে কি ?

4. বন্ধনীর ভেতরের বাক্যাংশগুলির যেটি বা যেগুলি ভুল সেটি বা সেগুলি কেটে দাও ঃ

(i) একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখার উপর (একটি মাত্র/একটির বেশী) লম্ব টানা যায়।

(ii) একটি সরলরেখার উপরিস্থিত কোন বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখার উপর (একটি মাত্র/দুটি) লম্ব অঙ্কন করা যায়।

(iii) একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু দিয়ে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল করে (একটি মাত্র/একটির বেশী/একটিও) সরলরেখা অঙ্কন করা (যায়/যায় না)।

(iv) একটি সরলরেখার উপরিস্থিত কোন বিন্দু দিয়ে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল করে (একটি মাত্র/একটির বেশী/একটিও) সরলরেখা অঙ্কন করা (যায়/যায় না)।

(v) যেকোন ত্রিভুজে (একটি মাত্র/দুটি) সূক্ষ্মকোণ অবশ্যই থাকবে।

(vi) একটি ত্রিভুজে (একটি মাত্র/একটির বেশী) সমকোণ থাকতে পারে।

(vii) একটি ত্রিভুজে (একটি মাত্র/একটির বেশী) স্থূলকোণ থাকতে পারে।

(viii) একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি (দুই সমকোণের কম/দুই সমকোণের সমান/দুই সমকোণের বেশী) হবে।

(ix) যেকোন ত্রিভুজে ক্ষুদ্রতম বাহুর বিপরীত কোণ (স্থূলকোণ/সমকোণ/সূক্ষ্মকোণ) হবে।

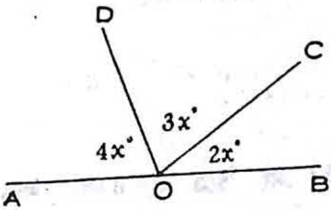
(x) একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c একক হলে, $a+b-c$ (ধনাত্মক/শূন্য/ঋণাত্মক) হবে।

(xi) $\triangle ABC$ ও $\triangle PQR$-এর $AB=PQ$, $BC=QR$ এবং ($\angle ABC=\angle PQR$/$\angle ACB=\angle PRQ$) হলে ত্রিভুজ দুটি অবশ্যই সর্বসম হবে।

বিবিধ প্রশ্নমালা 3

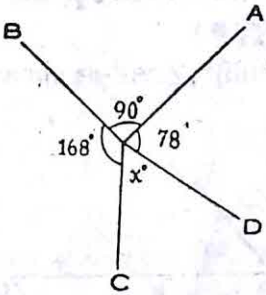
1. নিচের চিত্রগুলি থেকে প্রতিক্ষেত্রে x-এর মান নির্ণয় কর :

(i)



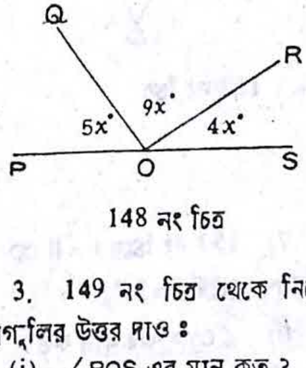
146 নং চিত্র

(ii)

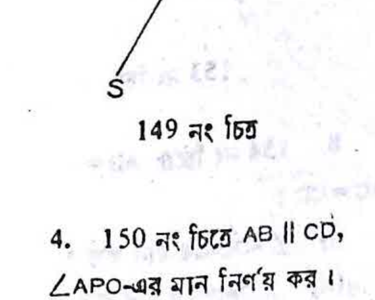


147 নং চিত্র

2. 148 নং চিত্র থেকে ∠POQ, ∠QOR ও ∠ROS-এর মান নির্ণয় কর। কোন্ দুটি কোণ পরস্পর সম্পূরক ?



148 নং চিত্র



149 নং চিত্র

3. 149 নং চিত্র থেকে নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

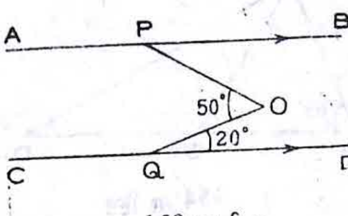
(i) ∠POS এর মান কত ?

(ii) POR কি একটি সরলরেখা ?

(iii) QOS কি একটি সরলরেখা ?

(iv) কোন্ দুটি কোণ পরস্পর সম্পূরক ?

4. 150 নং চিত্রে AB ∥ CD, ∠APO-এর মান নির্ণয় কর।



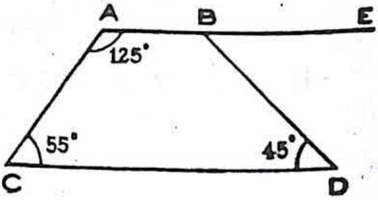
150 নং চিত্র

5. 151 নং চিত্র থেকে উত্তর দাও :

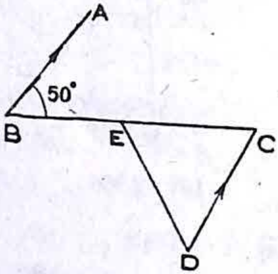
(i) AB ও CD-এর মধ্যে সম্পর্ক কি ?

(ii) ABCD চতুর্ভুজটি কি ধরণের চতুর্ভুজ ?

(iii) ∠DBE-এর মান কত ?



151 নং চিত্র



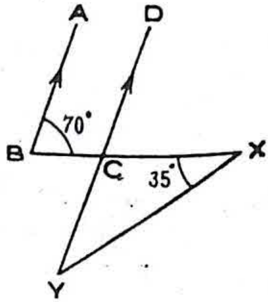
152 নং চিত্র

6. 152 নং চিত্রে BA || DC এবং EC = ED ; ∠BED-এর মান কত ?

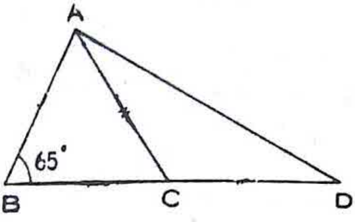
7. 153 নং চিত্রে BA || CD ; ∠ABC = 70°, ∠CXY = 35°,

(i) ∠CYX-এর মান কত ?

(ii) CX ও CY-এর মধ্যে সম্পর্ক কি ?



153 নং চিত্র



154 নং চিত্র

8. 154 নং চিত্রে AB = AC = CD ;

(i) ∠ADC-এর মান কত ?

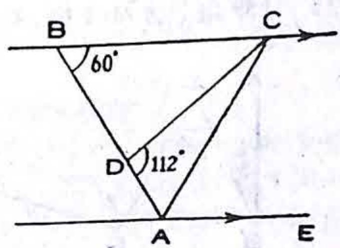
(ii) ∠DAB-এর মান কত ?

9. 155 নং চিত্রে BC=AC এবং BC ∥ AE

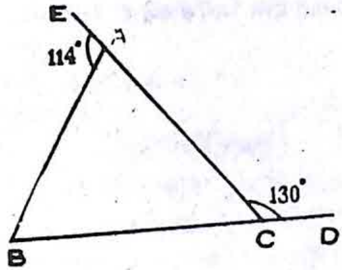
(i) △ABC কি ধরনের ত্রিভুজ ?

(ii) ∠CAE-এর মান কত ?

(iii) ∠ACD-এর মান কত ?



155 নং চিত্র



156 নং চিত্র

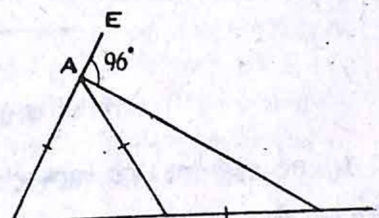
10. 156 নং চিত্র থেকে ∠ABC-এর মান নির্ণয় কর।

11. 157 নং চিত্রে AB=AC=CD ;

(i) ∠BAC-এর মান কত ?

(ii) ∠ADC-এর মান কত ?

(iii) ∠ADF-এর মান কত ?



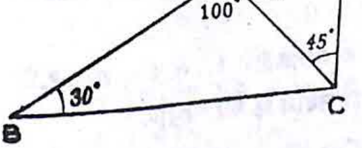
157 নং চিত্র

12. 158 নং চিত্র থেকে নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ

(i) ∠ADC-এর মান কত ?

(ii) ∠ACB-এর মান কত ?

(iii) AD ও DC-এর মধ্যে সম্পর্ক কি ?



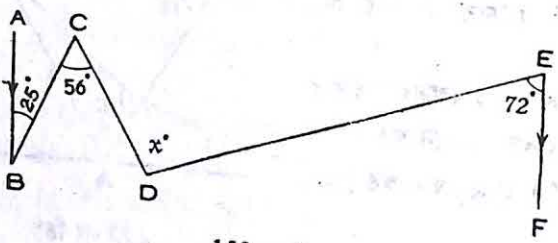
158 নং চিত্র

(iv) AB ও BC-এর মধ্যে সম্পর্ক কি ?

(v) △ABC কি ধরনের ত্রিভুজ ?

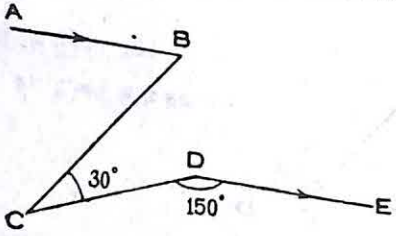
(vi) △ADC কি ধরনের ত্রিভুজ ?

13. 159 নং চিত্রে AB ∥ EF, x-এর মান নির্ণয় কর।



159 নং চিত্র

14. 160 নং চিত্রে AB ∥ DE ; ∠ABC-এর মান নির্ণয় কর।



160 নং চিত্র

বিবিধ প্রশ্নমালা 4

1. BC রেখাংশের দুই পাশে দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ △ABC ও △DBC অঙ্কন করা হল। প্রমাণ কর যে, AD, BC বাহুকে লম্ব ভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

2. প্রমাণ কর যে, একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা শীর্ষকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক হবে।

3. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক ভূমির সমান্তরাল হলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

4. AB ও CD রেখাংশ দুটি সমান ও সমান্তরাল। A ও C প্রান্ত দুটি একই দিকে আছে। প্রমাণ কর যে, AC ও BD সমান ও সমান্তরাল।

5. △ABC-এর ∠A সমকোণ এবং AC > AB। AC-এর উপর P এমন একটি বিন্দু যে, CP = AB. প্রমাণ কর যে ∠BCP > ∠PBC.

6. ABC ত্রিভুজের BC বাহু P ও Q বিন্দুতে সমান তিন ভাগে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে AP = AQ হলে, AB = AC.

7. ABCD চতুর্ভুজের $\angle A = \angle D$ এবং $AB = DC$; প্রমাণ কর যে, (i) $\triangle ABD \cong \triangle ADC$, (ii) $\triangle ABC \cong \triangle BCD$, (iii) $AD \parallel BC$. চতুর্ভুজটি কি ধরনের চতুর্ভুজ ?

[**আভাস :** (iii) AB ও DC বর্ধিত করে প্রমাণ কর।]

8. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle B$ সমকোণ। AC-এর মধ্যবিন্দু D. AB-এর উপর E যে কোন একটি বিন্দু। BC-এর উপর C বিন্দুতে লম্ব বর্ধিত ED-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে EF, D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে।

[**আভাস :** $\triangle EAD$ ও $\triangle FCD$ সর্বসম প্রমাণ কর।]

9. ABC সমবাহু ত্রিভুজের ভেতরে D যেকোন একটি বিন্দু। BDE সমবাহু ত্রিভুজটি এমনভাবে অংকন করা হল যে, A ও E বিন্দু BD-এর বিপরীত পাশে থাকে।

প্রমাণ কর যে, $AD = CE$.

[**আভাস :** $\triangle ABD$ ও $\triangle BCE$ সর্বসম প্রমাণ কর।]

10. কোন একটি রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু থেকে ঐ রেখাংশের প্রান্তবিন্দু দুটি সমান দূরে অবস্থিত—প্রমাণ কর।

11. BX সরলরেখা $\angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডক। BX-এর উপর অবস্থিত P বিন্দু থেকে BA ও BC-এর উপর অংকিত লম্ব দুটি BA ও BC-কে যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $PQ = PR$.

12. $\triangle ABC$-এর $AB = AC$. BA ও CA-কে যথাক্রমে E ও F পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, $AE = AF$ হয়। প্রমাণ কর যে, $\angle BFA = \angle CEA$.

13. $\triangle ABC$-এর $\angle B$ ও $\angle C$-এর বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে BX ও CY. A বিন্দু থেকে BX ও CY-এর উপর অংকিত লম্ব যথাক্রমে বর্ধিত CB ও বর্ধিত BC-কে R ও S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $RS = AB + BC + CA$.

14. ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ। প্রমাণ কর যে AD, CE-এর উপর লম্ব।

15. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle C$ সমকোণ। AC-এর যে পাশে B অবস্থিত তার বিপরীত পাশে D এমন একটি বিন্দু যে $AD = AB$ এবং $\angle DAC = \angle BAC$ প্রমাণ কর যে B, C, D সমরেখ।

16. ABCD চতুর্ভুজের AC কর্ণ $\angle BAD$ এবং $\angle BCD$কে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। BO, AC-এর উপর লম্ব। DO যোগ করা হল। প্রমাণ কর যে D, O, B সমরেখ।

17. ABC ত্রিভুজের BA ও CA বাহু থেকে দুটি সমান অংশ কেটে নেওয়া হল। BC-এর মধ্যবিন্দু O ; $OD = OE$ হলে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

18. PQR ত্রিভুজের PQ ও RQ বাহু থেকে দুটি সমান অংশ PX ও RY কেটে নেওয়া হল। $RX = PY$ হলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

19. ABC ত্রিভুজের BA ও CA বাহু দুটির উপর যথাক্রমে D ও E এমন

দুটি বিন্দু যে, CD=BE হয়। D ও E থেকে BC-এর উপর অংকিত লম্ব দুটি সমান। প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

20. △PQR-এর PQ=PR RP ও QP-কে যথাক্রমে S ও T পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যে, PS=PT হয়। PL ও PM যথাক্রমে QR ও ST-এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, PL ও PM একই সরলরেখায় অবস্থিত।

21. ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ∠B সমকোণ। ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AC=AB+BD.

22. ABC ত্রিভুজের ∠A সমকোণ এবং AC>AB. AC-এর উপর P এমন একটি বিন্দু যে, CP=AB. BC-এর উপর লম্ব AX ও PY, BC-কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,

(i) ∠BAX=∠PCY (ii) △ABX≅△CPY.

এ থেকে প্রমাণ কর যে, AX=CY.

23 একটি ছাত্র উপপাদ্য 9-এর প্রমাণ নিম্নলিখিত উপায়ে করল :

অঙ্কন : BC-এর উপর একটি লম্ব টানা হল।

প্রমাণ : BC-এর উপর AD লম্ব বলে △ABD ও △ACD দুটি সমকোণী ত্রিভুজ হল।

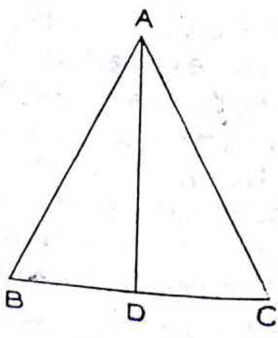
এবার, △ABD ও △ACD সমকোণী ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

অতিভুজ AB=অতিভুজ AC,

AD সাধারণ বাহু।

∴ △ABD≅△ACD

∴ ∠ABC=∠ACB



161 নং চিত্র

প্রমাণটি সিদ্ধ কিনা সে সম্বন্ধে তোমার মতামত দাও।

24. একটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হবে। এ উপপাদ্যটি প্রমাণ করার জন্য নিচের যুক্তিটি দেওয়া হল :

△ABD ও △ACD-এর মধ্যে

BD=CD (কল্পনানুসারে)

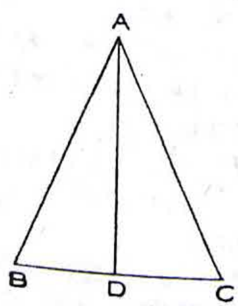
AD সাধারণ বাহু

∠BAD=∠CAD (কল্পনানুসারে)

∴ △ABD≅△ACD

এই যুক্তির মধ্যে কিছু গলদ রয়ে গেছে। কোথায় কি গলদ তা বার কর।

সঠিক যুক্তি দিয়ে উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।



162 নং চিত্র

জ্যামিতি

উত্তরমালা

অনুশীলনী 1

1. (i) অনেকগুলি (ii) অনেকগুলি (iii) অনেকগুলি (iv) অনেকগুলি (v) সমরেখ (vi) সমবিন্দু (vii) দুটি (viii) পরস্পরচ্ছেদীভাবে বা সমান্তরালভাবে (ix) একটি (x) সমান্তরাল 5. (a) সূক্ষ্মকোণ, সমকোণ, স্থূলকোণ, সরলকোণ (b) সূক্ষ্মকোণ—(i), (iv) ; সমকোণ—(ii) ; স্থূলকোণ—(iii), (vi) ; সরলকোণ—(v) 6. কোণের মাপ, অন্তবর্তীতা, সমরেখতা, রেখাংশের দৈর্ঘ্য বা দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব 7. (i) ঘূর্ণন (ii) প্রতিফলন (iii) চলন বা প্রতিফলন (iv) প্রতিফলন (v) চলন 8. প্রতিফলন—প্রতিফলন রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলি, প্রতিফলন রেখা ও ঐ রেখার উপর লম্বগুলি ; চলন—চলনের দিকের সরলরেখাগুলি ; ঘূর্ণন—ঘূর্ণন কেন্দ্র 9. চলন।

অনুশীলনী 2

7. 8 সেমি ও 6 সেমি বাহু দুটি পরস্পর লম্ব, ঐ বাহু দুটির ছেদ বিন্দু দিয়েই তিনটি লম্ব যাবে। 9. লম্ব সমদ্বিখণ্ডকটি অপর কর্ণ হবে।

অনুশীলনী 3

3. 87°, 85°, 72°, 58° 40°, 30°, 18°, 10°, 2°, 4. 170° 150°, 135° 120°, 90°, 70°, 50°, 37°, 25°, 13° 5. (i) 45° (ii) 90° (iii) 60° (iv) 45° 6. সঠিক বাক্য—(i), (vi) 7. পূরক কোণ—যে কোন বাহুর উপর লম্ব আঁকতে হবে, সম্পূরক কোণ—যে কোন বাহুকে বাড়িয়ে দিতে হবে।

অনুশীলনী 4

1. 138° 2. ·5° 3. 115°, 65° 4. 120°, 60°
5. 40 6. 56, লম্ব।

অনুশীলনী 5

1. একই সরলরেখায় থাকবে 2. না 3. একই সরলরেখায় অবস্থিত 5. যেকোন একটি বাহুকে বাড়িয়ে দিয়ে 6. 30°

অনুশীলনী 6

1. $\angle COA = 110°$, $\angle AOD = 70°$, $\angle DOB = 110°$ 2. 55° 55°, 125°, 125° 3. (i) না (ii) না 4. হ্যাঁ 5. 65, 35, 115

অনুশীলনী 7

1. (i) সমান্তরাল (ii) সমান্তরাল (iii) সমান্তরাল নয় (iv) সমান্তরাল
নয় (v) সমান্তরাল 3. সামান্তরিক

অনুশীলনী 8

1. $\angle BGH=130^\circ$, $\angle GHD=50^\circ$, $\angle DHF=130^\circ$, $\angle FHC=50^\circ$,
$\angle CHG=130^\circ$, $\angle HGA=50^\circ$, $\angle AGE=130^\circ$
3. ($\angle EGH$, $\angle FGK$), ($\angle HGA$, $\angle KGB$, $\angle FKG$), ($\angle BGE$, $\angle AGF$, 2. 95°
$\angle KFG$), ($\angle BGH$, $\angle DKG$), ($\angle EGA$, $\angle GFC$) 4. $\angle PAR=110^\circ$,
$\angle ARP=40^\circ$, $\angle RPA=30^\circ$

অনুশীলনী 9

1. 50° 2. 50° 3. $\angle CAB=60^\circ$, $\angle ABC=40^\circ$, $\angle BCA=80^\circ$

অনুশীলনী 10

1. 61° 2. 30°, 60°, 90°
4. $\angle BAD=55^\circ$, $\angle CAD=35^\circ$, 3. 30°, 60°, 90°
$\angle ADC=90^\circ$ 5. 360° $\angle BCA=55^\circ$, $\angle ADB=90^\circ$,

অনুশীলনী 11

1. (i) 6 সমকোণ (ii) 8 সমকোণ (iii) 10 সমকোণ (iv) 12
সমকোণ (v) 16 সমকোণ (vi) 20 সমকোণ 2. 118° 3. 138°
4. 80°, 80°, 40°, 160° 5. না 6. না 7. 180°
8. (i) 108°, 72° (ii) 120°, 60° (iii) 135°, 45° (iv) 140°,
40° (v) 144°, 36° (vi) 150°, 30° (vii) 160°, 20°
(viii) 162°, 18° 9. (i) পারে, 60 (ii) পারে, 36 (iii) পারে না
(iv) পারে, 20 (v) পারে, 15 (vi) পারে, 12 (vii) পারে না
(viii) পারে, 9 (ix) পারে না (x) পারে, 8 (xi) পারে না
(xii) পারে নয় (xiii) পারে, 5 10. (i) পারে না (ii) পারে না
(iii) পারে, 6 (iv) পারে, 10 (v) পারে না (vi) পারে, 18
(vii) পারে, 24 (viii) পারে, 30 (ix) পারে, 36 (x) পারে, 40
(xi) পারে, 45 (xii) পারে, 72 13. 105°

অনুশীলনী 12

1. 50° 2. 40° 3. 50°, 50°, 80° 4. 120°, 30°,
30° 5. (i) 36°, 72°, 72° (ii) 90°, 45°, 45° (iii) 20°,
80°, 80° (iv) 120°, 30° 30° 6. 35°, 35° 7. 130°
36°, 36°, 108° 9. 30°, 75°, 75°

অনুশীলনী 13

1. CP=CQ

অনুশীলনী 14

1. (i) ∠BAC=∠QPR অথবা BC=QR (ii) BC=QR অথবা ∠BAC=∠QPR অথবা ∠ACB=∠PRQ (iii) BC=QR অথবা AB=PQ অথবা AC=PR

অনুশীলনী 16

1. (i)

অনুশীলনী 17

1. PR>QR 2. AB>BC>AC 4. AC>AB

অনুশীলনী 18

1. (i), (ii), (v) 2. যিনি C হয়ে B-তে গেছেন 3. 6 সেমি এর কম, 4 সেমি এর বেশী

অনুশীলনী 19

1. যিনি দক্ষিণ দিকে গেছেন।

অনুশীলনী 20

3. উৎপন্ন ত্রিভুজের বাহুগুলির মাপ—14 সেমি, 8 সেমি ও 10 সেমি ; অর্থাৎ মূল ত্রিভুজের বাহুগুলির দ্বিগুণ ; কোণগুলির মান মূল ত্রিভুজের কোণগুলির মানের সমান। 4. AE = CE, DE = $\frac{1}{2}$BC 6. AC-এর মধ্যবিন্দুতে।

অনুশীলনী 21

4. AX = 2CX 5. সমবাহু ত্রিভুজ।

বিবিধ প্রশ্নমালা 2

1. (i) 118° (ii) সমরেখ (iii) সমান, এক, সমকোণ (iv) 48° (v) 90° (vi) সমান, 60° (vii) সমকোণী (viii) 45° (ix) 360° (x) সর্বসম, PR (xi) সর্বসম, ∠ZXY (xii) ছোট (xiii) সমান্তরাল
2. (i) ভুল (ii) ভুল (iii) ঠিক (iv) ঠিক (v) ভুল (vi) ভুল (vii) ঠিক (viii) ঠিক (ix) ভুল (x) ভুল (xi) ভুল (xii) ভুল

(xiii) ঠিক 3. (i) না (ii) না (iii) না (iv) না (v) হ্যাঁ (vi) না (vii) না (viii) হ্যাঁ (ix) হ্যাঁ (x) হ্যাঁ (xi) না (xii) হ্যাঁ 4. (i) একটি মাত্র (ii) একটি মাত্র (iii) একটি মাত্র যায় । (iv) একটিও, যায় না। (v) দুটি (vi) একটি মাত্র (vii) একটি মাত্র (viii) দুই সমকোণের সমান (ix) সূক্ষ্মকোণ (x) ঋণাত্মক (xi) ∠ACB = ∠PQR.

বিবিধ প্রশ্নমালা 3

1. (i) 20 (ii) 24 2. 50°, 90°, 40° ; ∠POQ ও ∠ROS
3. (i) 120° (ii) না (iii) হ্যাঁ (iv) ∠POS ও ∠POQ এবং ∠ROS ও ∠ROQ 4. 150° 5. (i) AB ∥ CD (ii) প্রতিপাদিত (iii) 45° 6. 100° 7. (i) 35° (ii) CX = CY 8. (i) 32·5° (ii) 82·5° 9. (i) সমবাহু (ii) 60° (iii) 8° 10. 64° 11. (i) 52° (ii) 32° (iii) 148° 12. (i) 90° (ii) 50° (iii) পরস্পর লম্ব ও সমান (iv) BC > AB (v) স্থূলকোণী বিষমবাহু (vi) সমকোণী সমদ্বিবাহু 13. 106 14. 60°